Kurvendiskussion

25 Februar 2008 - 7. Klasse AHS

Das Ziel der Kurvendiskussion ist es einen Graphen zu untersuchen und ihn letztendlich zu zeichnen. Bei der Untersuchung können wir bestimmte Punkte betrachten und wir lernen den Graphen näher zu beschreiben.

Definitionsmenge

Die Frage lautet: Welche Zahlen kann die Unbekannte (meist x) annehmen? Die Antwort ist die Definitionsmenge. Um sie festzustellen benutzt man bekannte Einschränkungen in der Mathematik. Am wichtigsten ist wohl, dass es keine Division durch 0 gibt. Des Weiteren darf aus einer negativen Zahl nicht die Wurzel gezogen werden. Um die Definitionsmenge zu erhalten, setzen wir also den Nenner gleich Null oder die Diskriminate kleiner Null. Die Definitionsmenge sind alle reelen Zahlen außer denen, für die die unerlaubte Operation zutrifft („Pole“).

Asymptoten

Asymptoten sind Kurven, denen sich die angegebene Funktion nähert und sich anschmiegt. Zum Beispiel $f_{(x)} = 1/x$ schmiegt sich der x-Achse an. Die Asymptote wäre in dem Fall a_1: $y = 0$ (ist gleich der x-Achse). Bedenke, dass an den Polstellen die Kurve in die Unendlichkeit geht und wieder aus der Unendlichkeit kommt. Das heißt Asymptoten sind auch immer an Polstellen zu finden.

Möchte man die Asymptoten einer Funktion herausfinden, muss man drei Fallunterscheidungen machen. n= Grad des Nenners; m = Grad des Zählers:

$m > n$	Führe eine Polynomdivision durch
$m = n$	Konstanten fallen weg; x kürzen sich; es bleibt ein Bruch als Asymptote
$m < n$	dividere durch die höchste Potenz

Durch die Berechnungen ergeben sich Funktionen, die eine Asymptote beschreiben. Solche Asymptoten können gegenfalls die Funktion kreuzen. Aber es gibt auch andere Asymptoten: die Polstellen. Funktionen nähern sich auch Polstellen an und schmiegen sich an diese. Die Funktion selbst darf niemals die Pol-Asymptote berühren. Solche Asymptoten werden in der Form a_1: x = *(x-Wert der Polstelle)* angeschrieben.

Nullstellen

Nullstellen haben das Kennzeichen, dass N (x | 0) gilt. Somit liegen Nullstellen immer auf der x-Achse. Um alle Nullstellen zu finden, muss man also alle Punkte finden für die $f_{(x)} = 0$ gilt. Setze also die Funktion gleich Null und du erhälst alle Punkte. Passe auf, dass es beim Wurzelziehen immer 2 Lösungen gibt (positiv und negativ).

Monotonie

Die Monotonie beschreibt den Graphen, ob er steigend oder fallend ist. x ist ein Wert in einem Intervall:

$f'_{(x)} < 0$	Der Graph ist streng monoton fallend
$f'_{(x)} > 0$	Der Graph ist streng monoton steigend

$f'_{(x)} <= 0$	Der Graph ist monoton fallend
$f'_{(x)} >= 0$	Der Graph ist monoton steigend

Stelle als erstes Intervalle auf. Zur Notation berücksichtige Extremstellen, Wendestellen, die positive und negative Unendliche und alle Polstellen (da sich ja dort die Monotonie ändert).

Krümmung

Die Krümmung besagt in welche Richtung sich der Graph neigt. Man kann es mit Autofahren in einer Kurve vergleichen: die Bahn (bzw. der Graph) ist dann linksgekrümmt oder rechtsgekrümmt.

$f''_{(x)} > 0$	linksgekrümmt
$f''_{(x)} < 0$	rechtsgekrümmt
$f''_{(x)} < 0 \ \|\| \ f''_{(x)} > 0$	einheitlich gekrümmt

Ergänzung: Wichtige Punkte (mit mathem. Definition)

Terassenpunkt = Sattelpunkt (S/T)

Ein Terassenpunkt hat die Eigenschaft, dass sowohl die erste Ableitung als auch die zweite Ableitung der Funktion gleich Null ist.

$f'_{(x)} = 0$ & $f''_{(x)} = 0$

Betrachtet man die Monotonie, betritt der Graph den Terassenpunkt mit einer strengen Monotonie (egal ob steigend oder fallend). Zum Zeitpunkt des Terassenpunkts ist die Funktion monoton. Danach setzt sie ihr strenge Monotonie wieder fort. Sozusagen macht die Funktion eine kleine Ruhepause auf der Terasse.

Um sie ausfinden zu machen, berechnen wir alle Extremstellen, die auch Wendestellen sind.

Wendepunkte (W)

Gegenüber der Extremstelle verändert die Funktion am Wendepunkt nicht die Monotonie, sondern sein Krümmungsverhalten. Die Tangente, die man an diesem Punkt erstellen kann, nennt man Wendetangente.

Für alle Wendepunkte gilt, dass die zweite Ableitung der Funktion am Wendepunkt gleich Null ist. Diese Definition ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend. Zur genauen Überprüfung, muss die dritte Ableitung der Funktion an der Wendestelle ungleich Null sein.

Extremstellen (E/Max/Min)

Extremstellen sind Stellen, die den tiefsten oder höchsten Punkt des Graphen darstellen. Meist definiert man ein Intervall, um dessen Extremwerte zu finden und dann spricht man von „lokalen Extremstellen“. In einer Extremstelle ändert die Monotonie ihr Verhalten. Für alle Extremstellen gilt: $f'_{(x)} = 0$. Um zwischen Hochstellen (höchster Punkt des Graphen) und Tiefstellen (niedrigster Punkt des Graphen) zu unterscheiden, nehmen wir unsere Extremstelle her und betrachten eine Stelle p links oder rechts neben dem Graphen. Gilt $f_{(x)} >= f_{(p)}$ handelt es sich um eine

Maximumstelle. Gilt $f_{(x)} <= f_{(p)}$ handelt es sich um eine Minimumstelle. Man kann sie auch anders feststellen:

$f'_{(x)} = 0$ & $f''_{(x)} < 0$ Hochpunkt
$f'_{(x)} = 0$ & $f''_{(x)} > 0$ Tiefpunkt

Eine Funktion n-ten Grades hat n-1 Extremstellen (da eine Funktion Gleichung xten Grades x Lösungen hat). Und die Extremstellen sind in der Ableitung die Nullstellen. Um Extremstellen ausfindig zu machen, setzen wir also die erste Ableitung der Funktion auf Null.

Ergänzung: Polstellen

Polstellen wurden bereits bei der Definitionsmenge erwähnt. In Polstellen ist eine Funktion nicht definiert. Das tritt beispielweise auf, wenn das Einsetzen eines x-Werts eine Division durch Null ergibt. Dieser x-Wert ist dann die „Polstelle“. Beim Zeichnen des Graphen zeichnet man an dieser Stelle eine Senkrechte in die positive Unendlichkeit. Der Graph setzt sich dann in der negativen Unendlichkeit fort und führt zum nächsten definierten Punkt.

Um Pole zu finden, versuchen wir beispielweise den Nenner einer Funktion Null zu setzen.

Ergänzung: (Lücken)

Sie entsteht wenn sowohl der Nenner als auch Zähler gleich Null ist.

Zusammenfassung

Wie gehen wir also eine Kurvendiskussion an?

1. Ableitungen bilden (ersten und zweite; evtl. auch dritte) (weitmöglichst kürzen)
2. Definitionsmenge bilden
3. Nullstellen finden
4. Extremstellen finden
5. Wendepunkte finden
6. Terassenpunkte finden
7. Krümmungsverhalten feststellen
8. Monotonie
9. Asymptoten finden
10. Zeichnen

Ergänzung: Graphen erkennen

Die bekanntesten Graphen sollte man kennen. Wie schaut x^n aus? Wie schaut 1/x aus? Wie schaut x^1/2 aus?

Eine lineare Funktion hat den Aufbau $f_{(x)} = k*x + d$. k steht für eine Konstante, die die Steigung des Graphen durch x beeinflusst. d ist ebenfalls eine Konstante und verschiebt den Graphen entlang der y-Achse. Aufgrund dieser zwei Tatsachen kann man von einem einfachen Graphen auf dessen Funktion schließen, wenn man den

Unterschied zu $f_{(x)} = x_n$ betrachtet.

Die nächste Hürde wäre es eine Ableitung gegeben zu haben und die passende Ausgangsfunktion zu finden. Hierbei sollte man die Merkmale der besonderen Punkte kennen. Am wichtigsten ist wohl, dass Extremstellen die Nullstellen der Ableitung darstellen. Und eine Funktion n-ten Grades hat n-1 Extremstellen. Konstanten fallen durch das Ableiten weg und deshalb wissen wir nicht die Position des Graphen von der Ausgangsfunktion auf der y-Achse.

Die genannten Merkmale helfen aber nur, wenn man eine Vermutung hat und diese Vermutung überprüfen will. Zur Vermutung kommt man, indem man den Verlauf des Graphen anschaut. Ich nehme dazu das gegenteilige Beispiel an: Wir suchen die erste Ableitung eines Graphen. Macht der Graph eine Linkskrümmung, nimmt die Steigung des Graphen zu. Umgekehrt nimmt sie ab. Somit müssen wir in der Ableitung immer höhere y-Werte erhalten. Danach landen wir in der Ausgangsfunktion zB bei einem Hochpunkt. Dieser muss in der Ableitung eine Nullstelle darstellen.

Durch diese Überlegungen können wir näherungsweise an den Graphen der Ableitung der Funktion gelangen. Das selbe gilt natürlich, wenn man von der ersten Ableitung auf die zweite Ableitung schließen möchte (bzw. umgekehrt). Bekommt man ein Beispiel auf dem die Ausgangsfunktion abgebildet ist und man soll die passende der drei Ableitungen finden, so sollte man sich an diese Tipps halten. Meist fallen zwei der möglichen Lösungen weg, weil sie nicht Regeln bezüglich der Extremstellen einhalten. Dann bleibt nur noch eine übrig. Spricht keine mathematische Definition gegen sie, so hat man die Lösung gefunden.

Ergänzung: Ableiten

Die Ableitung einer Konstante ist null. Die Ableitung der Variable x ist 1.

$f_{(x)} = x^n$ $f'_{(x)} = n*x^{n-1}$
$f_{(x)} = c*x^n$ $f'(x) = n*c*x^{n-1}$

Produktregel:
$f_{(x)} = u(x)*v(x)$ $f'_{(x)} = u'_{(x)}*v_{(x)} + u_{(x)}*v'_{(x)}$

Quotientenregel:
$f_{(x)} = u_{(x)} / v_{(x)}$ $f'_{(x)} = (u'_{(x)}*v_{(x)} – u_{(x)}*v'_{(x)}) / v^2_{(x)}$

Kettenregel:
$f_{(x)} = u(v_{(x)})$ $f'(x) = u'(u(x)) * v'(x)$

Anwendung der Kettenregel in einem Beispiel

$f(x) = (x^3 – 4)^{1/2}$

„außen mal innen"
außen: $1/2 * (x^3 – 4)^{1-1/2} = 1/2 * (x^3 – 4)^{-1/2}$
innen: $3x^2$

$f'(x) = 1/2 * (x^3 – 4)^{1/2} * 3x^2$