Mathematik Maturaaufgaben
BRG Viktring zwischen 2001 und 2008

Lukas Prokop

25 April 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Dieses Dokument 3

2 2007/08 8A 3

3 2007/08 8B Blasge 5

4 2007/08 8C Pfeiler 6

5 2007/08 8D Schumann 8

6 2006/07 8A Egger 9

7 2006/07 8B Blasge 11

8 2005/06 8A Kerschbaumer 12

9 2005/06 8B 13

10 2005/06 8C 15

11 2004/05 8A Peterl 16

12 2004/05 8B Egger 17

13 2004/05 8C Errenst 18

14 2004/05 8D Schmidhofer 19

15 2003/04 8A Pfeiler 20

16 2003/04 8BE Errenst **22**

17 2003/04 8C Egger **23**

18 2002/03 8A Lientschnig **24**

19 2002/03 8B Peterl **25**

20 2002/03 8C Lechner **26**

21 2002/03 8C Wiltsche **28**

22 2001/02 8A Kerschbaumer **29**

23 2001/02 8C Lechner **31**

24 2001/02 8D Posch **32**

1 Dieses Dokument

Leider sind einige Angaben inkorrekt oder unvollständig, da die Jahresberichte voller Fehler sind. Alle Texte wurden jedoch manuell überarbeiten und Fehler wurden weitmöglichst ausgebessert.

Lukas Prokop 2009
written with $\LaTeX\,2_\varepsilon$
Alle Angaben sind den Jahresberichten entnommen

2 2007/08 8A

1. Der Grundriss eines Verkaufzeltes ist das Viereck ABCD.

   $$\overline{AB} = a = 7.5m; \overline{BC} = b = 8m; \overline{AD} = d = 9.2m\alpha = 104°; \beta = 115°$$

   Im Schnittpunkt F der Diagonalen wird ein 7m hoher Mast $\overline{FS}$ zur Spitze des Zeltes aufgestellt.

   - Mache eine Skizze des Vierecks und berechne die Diagonalen e (=AC) und f (=BD), alle Winkel im Dreieck ABF, den Flächeninhalt der Grundfläche, das Volumen und die Kantenlänge AS des Zeltes.
   - Die Kraft y (in Newton), die der Wind auf das Zelt ausübt, nimmt mit der Windgeschwindigkeit x (in ms^{-1}) nach der Ungleichung $y \leq 52x^2$ zu. Wie groš ist die Windkraft bei 10 kmh^{-1} maximal? (1 ms^{-1} = 3.6km^{-1}). Das Zelt hält Windkräften bis 3200 N stand. Bei welcher Windgeschwindigkeit muss das Zelt abgebaut werden?

2. Die beiden Kurven $y = x^2 + 1$ und $25x^2 - 4y^2 = 100$ bilden im 1. Quadranten mit der Geraden $y = 8$ eine endliche Fläche. Durch Rotation dieser Fläche um die y-Achse entsteht ein Schnapsglas.

   - Mache eine Zeichnung (mit Wertetabelle)
   - Berechne das Fassungsvermögen dieses Schnapsglases
   - Berechne die Höhe des Flüssigkeitsstanded, wenn sich 4 cl (= 40 cm^3) Tequila im Glas befinden.
   - Welche Masse hat das Gefäß, wenn es aus Glas ($\rho = 2.5gcm^{-3}$) hergestellt wird?
   - Der Schnaps wird ausgetrunken und in das Glas wird eine Eiskugel mit dem Radius $r = 2.5cm$ bis zur Berührung hineingelegt. Berechne den verbleibenden Zwischenraum unterhalb der Kugel. (Kontrollergebnis: Berührungspunkt $B(\sqrt{6}/7); k : x^2 + (y - 7.5)^2 = 2.5^2$)

3. Die drei Punkte A(3/3/-1), B(-4/-9/1) und C(6/-1/-3) liegen in einer Ebene E_1

   - Stelle die Ebenengleichung für die Ebene E_1 auf.
   - Eine zweite Ebene E_2, mit der Gleichung $E_2 : 4x - y + 8z = -80$ ist zur Ebene E_1 parallel und hat von ihr den Abstand d = 9. Berechne die Gleichung einer weiteren Parallelebene E_3 mit demselben Abstand zur Ebene E_1. (Kontrollergebnis: $E3 : 4x - y + 8z = 82$)
   - Die Gerade $g : X = (4; 0; -12) + t \cdot (-1; 3; 11)$ schneidet die Ebene E_3 im Punkt S. Berechne die Koordinaten von S (Kontrollergebnis: $S(2/6/10)$).
   - Die Punkte A, B, C und S bilden ein Tetraeder. Berechne den Flächeninhalt der Grundfläche und das Volumen des Tetraeders.
   - Spiegle die Spitze S an der Ebene E_1 und berechne die Koordinaten des gespiegelten Punktes S'
   - Zeige, dass S' auf der Ebene E_2 liegt.
   - Die Gerade g soll auf die Ebene E_1 projiziert werden. Gib die Gleichung der projizierten Gerade g_p an.

4. Der Abbau des in einem schmerz- und entzündungshemmenden Mittel enthaltenen Wirkstoffes Mefenaminsäure erfolgt im menschlichen Körper nach dem Gesetz $N_{(t)} = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. Gib alle in diesem Beispiel berechneten Zahlen auf 5 Dezimalstellen genau an!!!!!

   - Leite den Zusammenhang
     $$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$
     her und bestimme die Zerfallkonstante für den oben genannten Wirkstoff, wenn dieser mit einer biologischen Halbwertszeit $\tau = 4$ Stunden exponentiell abgebaut wird. Schreibe das zugehörige Abbaugesetz an.
   - Bei einem Patienten wird 1 Stunde 42 Minuten (= 1.7 h) nach Verabreichung der letzten Medikation eine Menge von 400 mg des Wirkstoffes im Körper festgestellt. Wie viel mg Wirksubstanz (N_o) muss sich daher unmittelbar nach der Medikamenteneinnahme im Körper befunden haben?
   - Berechne, nach wie viel Stunden weniger als 100 mg des Wirkstoffes nach Verabreichung einer Tablette von 500 mg nachzuweisen wäre.
   - INFO: Für eine heilende Wirkung muss eine mglichst gleichmäßig hohe Konzentration im Körper des Patienten vorhanden sein. Dafür ist das richtige Dosierintervall ausschlaggebend. Außerdem muss beachtet werden, dass erst ab 200 mg eine heilende Wirkung entfaltet wird, während bei mehr als 700 mg schädliche Nebenwirkungen auftreten können. Ein Patient erhält um 06.00 Uhr morgens eine Anfangsdosis von 600 mg und dann in weiterer Folge alle 8 Stunden eine Dosis von 500 mg verabreicht. Berechne für den Zeitraum von 24 Stunden, wie viel mg des Wirkstoffes sich jeweils unmittelbar vor sowie

unmittelbar nach jeder Medikamenteneinnahme im Körper des Patienten befinden (also unmittelbar vor 14.00 Uhr (= $N_{(8)}$, unmittelbar nach 14.00 Uhr (= $N_{(8)}$+ Einnahmedosis), unmittelbar vor 22.00 Uhr, ...).

- Gibt es Zeiträume, in denen eine überhöhte Dosis zu schädlichen Nebenwirkungen führen könnte? Hätte der Patient mit schädlichen Nebenwirkungen zu rechnen, wenn er um 06.00 Uhr Früh des nächsten Tages genauso wie am Vortag eine Dosis von 600 mg erhält? Begründe!

3 2007/08 8B Blasge

1. Die erste Ableitung einer Polynomfunktion, 3. Grades lautet

$$f'(x) = \frac{3}{8} \cdot (x^2 - 10x + 21)$$

Der Graph der Funktion f enthält den Punkt P = (5/2)

- Ermittle die Funktionsgleichung von f. Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^3 - 15x^2 + 63x - 49$
- Diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen für $0 \leq x \leq 8$. (Einheit: 5 mm)
- Beweise, dass die Nullstelle N_1, Hoch- und Wendepunkt Eckpunkte eines gleichschenkeligen Dreiecks sind.
- Berechne, wie viel Prozent des Inhalts der vom Graphen f und der x-Achse begrenze-Fläche auf dieses Dreieck entfallen.

2. Ein Eignungstest enthält u. a. auch fünf Fragen zum aktuellen Tagesgeschehen. Zu jeder dieser Fragen sind drei Antworten zur Auswahl angegeben, von denen nur eine richtig ist. Jemand hat keine Ahnung von den gefragten Inhalten und kreuzt zufällig an. Es sei X die Anzahl der richtigen Antworten.

- Welche Werte kann X annehmen?
- Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X durch eine Tabelle sowie ein Stabdiagramin dar.
- Berechne den Erwartungswert von X und erkläre die Bedeutung des Erwartungswertes
- Der Test gilt als bestanden, wenn mehr Fragen richtig als falsch beantwortet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Test zu bestehen?

3. Eine Firma möchte ein Gefäß von 4 Litern Inhalt herstellen. Berechne, ob seine Form ein (oben offenes) quadratisches Prisma oder ein (oben offener) Zylinder sein soll, damit der Materialverbrauch minimal ist.

- Berechne und interpretiere die beiden Ergebnisse.
- Weise nach, dass es sich um Minima handelt,

4. Der Innenraum eines Kessels entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion f mit $f(x) = k{\cdot}x^2$ um die y-Achse zwischen $y = 0$ und $y = 6$. Wähle k so, dass der obere Rand des Kessels den Radius $r = 4$ hat (Angaben in dm).

   a) Fertige eine Skizze an und berechne k.

   b) Berechne das Volumen V des Kessels.

   c) Der Kessel soll mit einer Flüssigkeit vom Volumen $V = 12{\cdot}\pi dm^3$ gefüllt werden. Wie hoch steht die Flüssigkeit im Kessel?

4 2007/08 8C Pfeiler

1. A (3/3/-2), B(5/7/2), C(1/9/6) und P_a(-4/2a/a) mit $a \in \mathbb{R}$

   - Ermittle die Gleichung der Ebene ϵ, welche die Punkte A, B, C enthält. Bestimme E so, dass der Punkt P_a in der Ebene ϵ liegt.
   - Es existiert mindestens ein Punkt F, sodass die Punkte A, B, C und F Eckpunkte eines Trapezes mit folgenden 2 Eigenschaften sind: AB $\parallel$ FC. Eine der beiden Parallelseiten ist doppelt so lang wie die andere. Zeichne eine Skizze und berechne die Koordinaten eines Punktes F. Argumentiere und begründe, dass es 4 Möglichkeiten für die Koordinaten von F gibt.
   - Zeige, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist, mit $\alpha \neq 90°$
   - Das Viereck ABCD ist die Grundfläche von 2 geraden Pyramiden mit der Körperhöhe $h = \sqrt{65}$. Berechne die Koordinaten der beiden Spitzen S_1 und S_2, sowie das Volumen einer Pyramide.
   - Berechne den Winkel β, den die Seitenkante AS_1, mit der Grundfläche einschließt.

2. Unmittelbar neben einem geraden, horizontalen Straßenstück AB befindet sich ein steil ansteigendes, abgeholztes, ebenes Gelände ABG, das bis zu einem Gipfel G eines Berges hinauf reicht. Geologen meinen, ein Hang dieser Bodenbeschaffenheit sei murengefährdet, wenn seine Neigung mehr als 41°beträgt. Zur Einschätzung der Gefahr wurde vermessen: die Länge des Straßenstückes: AB = 800m der Höhenwinkel von A zu G: $\alpha = 35.3°$ der Horizontalwinkel zwischen AB und der Vertikalebene in der AG liegt: $\gamma = 54,7°$ der Horizontalwinkel zwischen AB und der Vertikalebene in der BG liegt: $\delta = 48.9°$

   - Erstelle eine übersichtliche Skizze und beschrifte diese vollständig.
   - Ermittle die relative Höhe des Berggipfels G von der Horizontalebene.

- Berechne den Neigungswinkel ϵ des Hanges gegen die Horizontalebene und entscheide dann, ob ein Murenabgang zu befürchten ist.
- Unter welchem Höhenwinkel erscheint der Berggipfel G von B aus?
- Erkläre bei welcher Art von Aufgabenstellung der Kosinussatz verwendet wird. Formuliere an Hand deiner Skizze von a) ein eigenes Beispiel zur Anwendung des Kosinussatzes und erstelle ein vollständiges Protokoll zur Berechnung deines Beispiels.

3. Ein liegendes Weinfass hat die Form eines auf beiden Seiten abgeschnittenen Rotationsellipsoids. Der Boden hat einen Durchmesser von 4.8 dm, der größte Durchmesser in der Fassmitte beträgt 8 dm und die Höhe des Fasses beträgt 12.8 dm.

   - Wähle ein geeignetes Koordinatensystem, skizziere die Ellipse und zeige, dass $x^2 + 4y^2 = 64$ die Gleichung der gesuchten Ellipse ist. Berechne wie viel hl Wie (= Hektoliter Wein?) das volle Fass enthält.
   - Aus diesem Wein wird Sekt gemacht. Ein Sektglas wird innen von der Parabel $x^2 = 2py$ begrenzt. Die innere Höhe des Glases beträgt 10 cm, der obere innere Durchmesser beträgt 6 cm. Zeige, dass $x^2 = 0.9y$ eine Gleichung der Parabel ist und berechne das Füllvolumen, wenn die Füllmarke genau 1 cm unter dem oberen Rand angebracht ist.
   - Eine Flasche Sekt enthält 0.7 Liter. Ein Kellner bleibt beim Einschenken immer 2 mm unter der Füllmarke. Wie viele Gläsern muss er einschenken, um eine Flasche einzusparen?
   - Wähle die Ellipse aus a) und schätze im Intervall [0, 4] das Volumen durch Berechnung der Ober- und der Untersummen ab, indem du das Intervall in 8 Teile teilst.

4. Beispiel 4

   - Rasche Rettung ist bei Verschüttung durch Lawinen lebensnotwendig. Die Chance C zu überleben hängt von der Dauer der Verschüttung t ab und sinkt nach der Differentialgleichung
   $$\frac{dC}{dt} = -\lambda \cdot C$$
   Die Überlebenschance bei Ganzverschütteten beträgt nach 12 Minuten 77% und nach 30 Minuten nur noch 58%, Stelle einen Zusammenhang zwischen Dauer der Verschüttung t (in Minuten) und der Überlebenschance C (in %) als Funktion dar, indem du die Differentialgleichung löst. Berechne die Überlebenschance für einen Ganzverschütteten, der nach 45 Minuten gerettet wird und berechne die Zeit t, wenn die Überlebenschancen 90 % betragen sollen. Interpretiere und berechne für dieses Beispiel den Begriff der Halbwertszeit T und beweise (ohne Voyage) den Zusammenhang
   $$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

- 85% der Ganzverschütteten, die mit einem Lawinenairbag ausgerüstet sind, können ihn zu ihrer Rettung rechtzeitig auslösen. Eine Gruppe von 6 Tourengehern gerät in eine Lawine und alle werden zur Gänze verschüttet. Alle 6 haben jedoch einen Lawinenairbag. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 4 von ihnen den Airbag rechtzeitig auslösen können?
  Erfahrungsgemäßgermäß können sich 6% der Ganzverschütteten selbst befreien. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens einer der Gruppe selbst befreien kann? Durch eine statistische Auswertung der Lawinenunfälle der letzten Jahre ist bekannt, dass 44% der Verschütteten durch ihre Gruppenkameraden befreit werden, wenn es nun einem der 6 Tourengeher gelungen ist, sich zu befreien, wie groß ist darin die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen der anderen zu befreien? Mit welcher Wahrscheinlichkeit befreit er alle?

5 2007/08 8D Schumann

1. Gegeben ist die Funktion
$$f(x) = (4 - x)\cdot e^{\frac{x}{4}}$$
   - Untersuche die Funktion auf Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte. Zeichne weiters den Graphen von f im Intervall [-6;5].
   - Bestimme den Inhalt jenes Flächenstücks, das vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall [-2; 4] eingeschlossen wird.
   - Dem Flächenstück, das der Funktionsgraph mit der x-Achse im 1. Quadranten begrenzt, ist ein Rechteck mit größtmöglichem Flächeninhalt so einzuschreiben das gilt: A=O, B liegt auf der x-Achse und C auf f. Bestimme die Koordinaten von C.

2. Mit Hilfe einer Standlinie AB in 5m Entfernung parallel zum Ufer eines Sees soll die Entfernung zweier Bojen P und Q im See bestimmt werden. Dabei haben A und B die karthesischen Koordinaten A(12/5) und B(120/50) [Maße in m]. Man misst ferner die Winkel
$$\alpha_1 = \angle PAB = 71^\circ$$
$$\alpha_2 = \angle QAB = 35^\circ$$
$$\alpha_3 = \angle ABP = 45^\circ$$
$$\alpha_4 = \angle ABQ = 62^\circ$$
   - Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1:1000 an
   - Berechne die gegenseitige Lage der Bojen PQ.
   - Wie weit ist die Boje P vom Ufer entfernt?

3. Eine Blumenhandlung weiß aus Erfahrung, dass beim Transport ungefähr 10 % der transportierten Rosen beschädigt werden.
   - Die Blumenhandlung bietet Rosen im Bund an. Ein Bund enthält 50 zufällig ausgewählte Rosen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass davon (1) keine (2) genau 5 (3) mindestens 2 Rosen beschädigt sind.
   - Wie viel Stück Rosen muss ein Bund mindestens umfassen, damit der Kunde mit mindestens 96%-iger Wahrscheinlichkeit damit rechnen muss, mindestens eine be-schädigte Rose zu bekommen? Die Anzahl der beschädigten/unbeschädigten Rosen sei normalverteilt. Berechne jeweils den Erwartungswert μ und die Streuung σ.
   - In welchem Bereich (symmetrisch zu μ) liegt mit 96%-iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der unbeschädigten Rosen, wenn 300 Stück bestellt werden?
   - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung mit 400 Rosen höchstens 50 beschädigte enthält?
4. Das Parallelogramm ABCD [A(3/1/4), B(6/4/10), C(5/3/10), D] ist Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Höhe $h = 10\sqrt{2}$.
   - Berechne die Spitze(n) dieser Pyramide
   - Berechne das Volumen dieser Pyramide
   - Welchen Winkel schließt die Seitenkante OS mit der Grundfläche ein?

6 2006/07 8A Egger

1.1 Der Chorus Juventus Musica Viktring soll im Sommer L. Bernsteins Chichester Psalms zur Aufführung bringen. Das Konzert soll in einer zylinderförmigen Burgarena (Durchmesser: 42m, Höhe: 9m) stattfinden. Auf Grund der unsicheren Wetterlage der letzten Jahre beschließt man, die Arena mit einem bis zum Boden reichenden Rotationsparaboloid zu überdachen, wobei der umbaute Raum minimal werden soll. Berechne die Höhe der überdachung, den Bodenradius und das Volumen des umbauten Raumes. (Lsg.: $h = 18m; r \approx 29.7m; V = 25000m^3$)

1.2 Es soll zwei Vorstellungen geben. Der Veranstalter weiß: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% ist die erste Vorstellung ausverkauft. In diesem Fall ist die zweite Vorstellung mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% ebenfalls ausverkauft. Ist die erste Vorstellung aber nicht ausverkauft, so ist die zweite mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 65% ausverkauft. Zeichne ein Baumdiagramm und berechne: Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- ist mindestens eine Vorstellung ausverkauft?
- ist genau eine Vorstellung ausverkauft?

- sind beide Vorstellungen ausverkauft?

2.1 In A. Loyd Webbers Musical "Das Phantom der Oper" fällt ein Luster auf die Bühne. Der Luster befindet sich über dem Publikum und wird zuerst senkrecht gesenkt. Anschließend bewegt er sich auf einer Ellipsenbahn. Hierbei wird er von zwei Seilwinden F_1 und F_2 gesteuert, die sich 4m oberhalb der Bühne befinden. F_1 liegt 6.5m hinter dem Vorhang und F_2 3.5m vor dem Vorhang. Der Punkt L_1 wird vom Luster passiert und befindet sich 2m über der Bühne und 4.5 m vor dem Vorhang.

- Gib die Gleichung der Ellipsenbahn an, auf der sich der Luster bewegt.
- Wie viel m vor dem Vorhang trifft der Luster auf die Bühne?
  (Lsg.: 1,5 m vor dem Vorhang)

2.2 Wenn eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

um die x-Achse rotiert, entsteht ein Rotationsellipsoid, dessen Volumen mit der Formel

$$V = \frac{4}{3}ab^2\pi$$

zu berechnen ist. Verifiziere diese Formel.

3.1 Ein teilweise bewaldetes Grundstück hat die Gestalt eines Vierecks ABCD, wobei die Punkte C und D unzugänglich sind. Anlässlich einer Verlassenschaftsverhandlung wird das Grundstücks neu vermessen. Es werden folgende Daten erhoben:

$\overline{AB} = 160m, \angle DAB = 115°, \angle CAB = \alpha = 86°, \angle ABC = \beta = 62°, \angle ABD = \beta_1 = 43°$

- Berechne die Länge der fehlenden Seite $\overline{CD} = c$
- Anlässlich der Erbschaft soll das Grundstück in zwei flächengleiche Grundstückegeteilt werden, wobei die Trennungslinie durch A verläuft. Bestimme, ob die Gerade g die Seite BC oder die Seite CD schneidet und wie weit dieser Schnittpunkt von C entfernt liegt. (Lsg.: c 141,7m; A 401 00m:',- BC = 17,4,m)

3.2 Der Holzbestand des Grundstücks wird auf $3500m^3$ geschätzt. In 5 Jahren sollen $2500m^3$ Holz gefällt werden. Wie viele Jahre nach der Schlägerung wird der Holzbestand wieder auf 3500m angewachsen sein, wenn exponentielles Wachstumsverhalten vorausgesetzt wird und angenommen werden darf, dass das jährliche Wachstum 4.5% beträgt. (Lsg.: $t \approx 14$ Jahre)

4 Gegeben ist die Funktion $g(x) = -x^2 + 4x$. Durch die beiden Nullstellen und den Scheitel der Funktion verläuft der Graph der Funktion $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. $f(x)$ hat im Ursprung einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

- Zeige, dass die Funktionsgleichung von $f(x) = \frac{-1}{4}x^4 + x^3$ lautet.
- Berechne Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Funktion f(x)
- Gib die Gleichung der Tangente t im Wendepunkt W(2/f(2)) an.
- Fertige eine Zeichnung von f, g und t an (Einheit 1cm)
- Berechne den Inhalt der von f(x) und g(x) im ersten Quadranten eingeschlossenen Flächen. (Lsg.: A = 8)

7 2006/07 8B Blasge

1. Die Funktion $f(x) = (a + b{\cdot}x){\cdot}e^x$ hat den Hochpunkt $H = (1; e)$.
   - Ermittle die Funktionsgleichung von f.
     (Kontrolle: $f(x) = (2 - x){\cdot}e^x$)
   - Diskutiere die Funktion und zeichne den Graphen im Intervall [3; 2,5].
   - Berechne den Inhalt des Flächenstücks, welches die Kurve mit der x-Achse im ersten Quadranten einschließt.
2. Die Parabel $y = x^2 + 1$, die Hyperbel $25x^2 - 4y^2 = 100$ und die Gerade y = 8 bilden im 1. Quadranten eine endliche Fläche.
   Rotiert dieses Flächenstück um die y-Achse, so entsteht ein vasenförmiger Drehkörper. (Einheit E = 1cm).
   - Fertige eine Skizze an und berechne das Fassungsvermögen dieser Vase.
   - Berechne die Höhe des Wasserstandes, wenn sich 50 Milliliter Wasser im Gefäß befinden.
   - Berechne die Masse des Gefäßes, wenn es aus Glas hergestellt wird. (Dichte $rho = 2.5g/cm^3$)
3. Von einem viereckigen Grundstück sind bekannt:

   $$\overline{DA} = d = 40.7m, \overline{AB} = a = 35m, \overline{BC} = b = 34.4m$$

   $$\angle DAB = \alpha = 102.4°, \angle ABC = \beta = 111.47°$$

   Fertige eine Skizze an. Das Grundstück wird um 100 000€ zum Verkauf angeboten. Der ortsübliche Preis beträgt 56€ pro m^2. Berechne den Flächeninhalt und den ortsüblichen Preis des Grundstückes und beurteile danach das Angebot.
4. - Das Quadrat ABCD [A = (-1;-2;5), B = (3;2;3), C, D = (-3;2;z_1)] ist Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Spitze S = (2;1;8). Ermittle die fehlenden Eckpunkte und das Volumen der Pyramide.

- Bestimme das maximale Volumen, welches eine regelmäßige quadratische Pyramide bei gegebener Seitenkante s haben kann. Berechne die Längen der Grundkante und der Höhe sowie das maximale Volumen dieser Pyramide.
- Zeige, dass die gegebene Pyramide aus a) für ihre Seitenkantenlänge s maximales Volumen besitzt.

8 2005/06 8A Kerschbaumer

1. (20 Punkte) Polizeilichen Statistiken zufolge beträgt der Anteil der alkoholisierten Autolenker, die an Verkehrsunfällen mit Personenschaden beteiligt sind, in Österreich im Jahre 2004 6.6%.
   - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 18 Unfällen
     - mindestens 2
     - genau drei Autos von alkoholisierten Lenkern gefahren werden?
   - Bei wie vielen Unfällen ist mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein alkoholisierter Fahrer zu finden?
   - Wie groß wäre der Anteil p der Alkohollenker mindestens, wenn bei 25 Unfällen mit 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einer von einem alkoholisierten Autofahrer verursacht würde?
   - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 300 Unfällen, mindestens 15 und höchstens 25-mal Alkohol im Spiel war?
   - Im Anschluss an eine Aufklärungskampagne und der Einführung verbesserter Testgeräte will man überprüfen, ob es gelungen ist den Anteil dieser Lenker zu senken. Wie viele Unfälle müssten bei einer Stichprobe von 300 Unfällen von alkoholisierten Lenkern verursacht worden sein, damit man die ursprüngliche Wahrscheinlichkeit von 6.6% mit der maximalen Irrtumwahrscheinlichkeit von 0.05 verwerfen kann?
2. (22 Punkte) Ermittle alle Nullstellen, Extrem- und Wendestellen der reellen Funktion
   $$f(x) = (x-3)\cdot e^{\frac{x}{3}}$$
   und zeichne den Graphen im Intervall [-8,4]. Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das vom Funktionsgraphen und den beiden Koordinatenachsen begrenzt wird. Zerlege dafür das Intervall in 6 gleich lange Teilintervalle und berechne aus den zugehörigen Unter- und Obersummen den Flächeninhalt. Zeige, dass die Wendetangente und die Tangente in der Nullstelle aufeinander normal stehen und ermittle die Gleichung des Umkreises des rechtwinkligen Dreiecks, das von diesen Tangenten und der x-Achse begrenzt wird.
3. (20 Punkte)

- Eine Vase, die innen die Form eines halben, einschaligen Hyperboloids hat (Bodendurchmesser 8cm, Höhe 8cm, oberer Randdurchmesser $\frac{40}{3}$cm), ist randvoll mit Wasser gefüllt. Der Inhalt der Vase wird in ein Gefäß gegossen, dessen Innenraum ein Rotationsparaboloid (größter Durchmesser cm, Höhe 24cm) ist. Wie hoch steht das Wasser?
- Dem Paraboloidgefäß wird ein Drehzylinder mit maximalen Volumen eingeschrieben. Berechne das Volumen des Zylinders!

4. (20 Punkte) Ein Feld ABCD ist gegeben durch AB = a = 61.3m; AD = d = 94.8m; $\alpha = 104.28°$; $\beta = 118.39°$und $\delta = 83.77°$. Berechne seinen Flächeninhalt. Im Rahmen einer Flurbereinigung ist es so in ein flächengleiches Parallelogramm zu verwandeln, dass die Länge der Seite d und der Winkel a unverändert bleiben. Berechne die Länge der zweiten Seite und die Höhen des Parallelogramms.

9 2005/06 8B

1. Aus der sanften Hügellandschaft des nördlichen Weinviertels ragt weithin sichtbar der Buschberg hervor.

    - Am Buschberggipfel führt eine gerade, unter dem Winkel ($\alpha = 11.5°$von einem Punkt A ansteigende Straße zur Radarstation für zivile Luftraumüberwachung, deren Fußpunkt F in derselben Richtung weiter allerdings unzugänglich ist. Man steckt daher eine (schräge) Standlinie der Länge AB = 22.5 m in Richtung des Gebäudes ab. Die Höhenwinkel zur Spitze S der Radarstation betragen in den Punkten A und B $\beta = 47.8°$und $\gamma = 61.5°$. Mache eine Skizze und berechne die Höhe h = FS der Radarstation.
    - Fährt man die Straße Gnadendorf Richtung Buschberg, so sieht man den höchsten Punkt C der Radarstation für zivile Luftraumüberwachung am Gipfel des Buschberges (Seehöhe 535 m) vom Aussichtspunkt E (Seehöhe 300 m) unter dem Höhenwinkel $\delta = 4.2°$
    Links vom Buschberg sieht man nach einem Schwenken um den Horizontalwinkel $\epsilon = 26.2°$den höchsten Punkt D der Kugel der Radarstation für militärische Luftraumüberwachung unter dem Höhenwinkel $\phi = 2°$. Die Entfernungen vom Aussichtspunkt E zu den in der gleichen Horizontalebene gelegenen Fußpunkten F1 (lotrecht unter D) und F2 (lotrecht unter C) betragen: $EF_1 = 4125$m und $EF_2 = 3200$m.
    Mache eine Skizze und berechne den Abstand DC zwischen den beiden Radarstationen in Luftlinie.

2. In einer Gießerei wird flüssiges Kupfer in Behältern aus Stahl transportiert. (ρ Kupfer = 8.9 kg/dem^3, ρ Stahl = 7.8 kg/dem^3) Diese Behälter besitzen dieselbe Form wie jener Drehkörper, der durch die Rotation der folgenden Geraden bzw.

Kurven um die y-Achse entsteht.

$$g: y = -6; ell: \frac{x^2}{2.5^2} + \frac{y^2}{10^2}$$

$$f: y = \frac{25}{26}x^2 - 5$$

Die Ellipse befindet sich in 2. Hauptlage. Ein Achsenquerschnitt zeigt, dass die äußere Mantelhülle von der Geraden g, von der x-Achse und von einem Ellipsenabschnitt erzeugt wird und die innere Mantelhülle durch den Graphen von f begrenzt wird (Einheit: 1 dm)

- Berechne die Schnittpunkte von ell mit der x-Achse und mit g und die Nullstellen von f.
- Zeichne die beiden Kurven (Wertetabelle!) und die Gerade g (Einheit: 1 cm)
- Welches Fassungsvermögen besitzt ein derartiger Behälter und wie groß ist die Masse des transportierten Kupfers bei einem vollständig gefüllten Behälter?
- Welches Volumen und welche Masse besitzt der Behälter selbst?
- Welchen Flächeninhalt besitzt die Standfläche des Behälters?

3. Gegeben sind die Gerade

$$g: X = (-4, 3, 1) + t \cdot (2, -1, 3)$$

und die Ebene

$$E_1 = 1x - 1y + 0z = -1$$

sowie die Punkte A(1/2/3), B(4/5/3) und C(1/3/10).

- Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene E_1.
- Zeige, dass die Punkte A und B in der Ebene E_1 liegen, der Punkt C sich aber nicht auf E_1 befindet.
- Berechne den Abstand des Punktes P(-2/-3/11) von der Ebene E_1 und spiegle P an der Ebene E_1.
- Berechne die Koordinaten des Punkten P'
- Das Dreieck ABC ist Grundfläche eines Tetraeders mit der Spitze P. Gib die Gleichung der Ebene E_2 der Grundfläche des Tetraeders an.
- Berechne den Inhalt G der Grundfläche das Volumen V und die Höhe h des Tetraeders.

4. Derzeit ist das H5N1 (Hämagglutinin-5-Neuraminidase Uberträger der gefürchteten Vogelgrippe in aller Munde. Mitte Februar war von 3 infizierten Schwänen im Raum Graz, inzwischen ist nach etwa 10 Tagen von 70 toten Wasservögeln in

Kärnten (Kleine Zeitung 22. 2. 2006), die von der Landesanstalt für veterinärmedizinische Untersuchungen Ehrental nach Mödling zur weiteren Abklärung geschickt werden, die Rede. Es gibt in Österreich derzeit ca. 1.26 Mio. Hühner in Biohaltung bzw. Freilandhaltung: Unter der Annahme, dass die Stallpflicht aufgehoben gehoben würde, (sie besteht seit 2006 wieder bundesweit) wäre diese Anzahl von Hühnern für eine eventuelle Infektion gefährdet. Als Annahme für die Ausbreitung soll gelten:

$$N_0 = N(0) = 3; N(10)$$

Maximalzahl der Hühner = $K = 1.26{\cdot}10^6$

- Beschreibe die Ausbreitung der Infektion mit Hilfe eines
  - linearen
  - einfachen exponentiellen Modells der Form $N(t) = N_0{\cdot}a^t$. Stelle das Wachstumsgesetz für beide Modelle auf.
- Verwende als drittes Modell zur Beschreibung der Ausbreitung des Virus das Modell des kontinuierlichen logistischen Wachstums laut folgender Formel:

  $$N(t) = \frac{K{\cdot}N_0}{N_0 + (K - N_0){\cdot}a^t}$$

  $$K = 1.26{\cdot}10^6; N_0 = 3$$

  Ermittle a auf 3 Dezimalstellen!
- Berechne anhand aller 3 Modelle die Anzahl der infizierten Hühner nach 30, 45 und nach 60 Tagen. Interpretiere die unterschiedlichen Ergebnisse hinsichtlich ihrer Plausibilität.
- Berechne im dritten Modell, nach welcher Zeit 50% der Hühner vom Virus befallen sein werden.
- Nach wie viel Tagen sind laut exponentiellem Modell alle Hühner infiziert?
- Nach wie vielen Jahren wären laut linearem Modeel alle Hühner vom Virus befallen?

10 2005/06 8C

1. Eine Ölgesellschaft hat zwei Raffinerien A und B, in denen schweres, mittelschweres und leichtes Öl hergestellt werden. Die täglichen Produktionsmengen von schwerem Öl betragen 400 Tonnen in der Raffinerie A und 1000 Tonnen in der Raffinerie B, von mittelschwerem Öl in A und B je 100 Tonnen, von leichtem Öl 200 Tonnen in der Raffinerie A und 100 Tonnen in der Raffinerie B. Die Kosten je Tag belaufen sich in der Raffinerie A auf 4000 Euro und in B auf 3000 Euro. Der Mindestbedarf im Vierteljahr ist 64.000 t schweres Öl, 12.000 t mittelschweres und 16.000 t leichtes Öl. Wie viele Tage muß im Vierteljahr in beiden Raffinerien gearbeitet werden, damit die Gesamtkosten minimal werden? (10 Punkte)

2. Durch ein Grundstück von der Gestalt eines ebenen Vierecks ABCD wird eine 10m breite Straße gebaut. Der rechte Rand des Straßenstücks verläuft durch den Eckpunkt D normal auf die Seite a. Die Abmessungen des Grundstücks sind:
   a = AB = 101.40m
   d = AD = 109.70m
   $\angle$BAD = 80.73°
   $\angle$ABC = 111.08°
   $\angle$ADC = 90°
   Wie groß ist die Grundstücksfläche? Wie hoch ist die Grundablöse für die Straße, wenn 45€ pro m^2 bezahlt werden? (10 Punkte)

3. In ein kreisförmiges Reklameschild mit 0.8m Radius soll ein gleichschenkliges Dreieck mit maximalem Flächeninhalt eingezeichnet werden. Wie groß sind die Abmessungen des Dreiecks zu wählen? (10 Punkte)

4. Gegeben ist eine Ellipse in 1. Hauptlage mit $a : b = 2 : 1$ und der Tangente $t : 3x + 8y - 50 = 0$; weiters kennt man die Gerade $g : 8x - 9y + 36 = 0$. Bestimme (10 Punkte)
   - die Gleichung der Ellipse (Kontrolle: $x^2 + 4y^2 = 100$)
   - die Koordinaten des Berührpunktes T der Tangente t und
   - die Gleichung jenes Kreises k, der die Ellipse in T berührt und dessen Mittelpunkt M auf der Geraden g liegt.

11 2004/05 8A Peterl

1. Gegeben sind die beiden Kurven $y^2 = 4x$ und $8x^2 + 9y^2 = 72$.
   Bestimme die Art der Kurven, alle ihre Parameter, Brenn- und Scheitelpunkte und fertige eine Zeichnung an! Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers, der bei Drehung der gemeinsamen Fläche um die x-Achse entsteht?

2. Zwischen 2 gleich hohen Orten A und B soll eine geradlinige Eisenbahnlinie gebaut werden, die zwischen den Punkten M und N durch einen Tunnel führt. Zur Bestimmung der Tunnellänge MN wird ein in derselben Horizontalebene liegender Punkt P abgesteckt. Berechne die Tunnellänge MN, wenn im Gelände folgende Daten gemessen werden: PA = 5750 m, PB = 6410 m, $\angle$APB = 98.27°, ? 25.03°, BPN = 26.03°. Welche Geldmittel sind für den Tunnelbau vorzusehen, wenn 1 km Tunnel 20 Mio. Euro kostet und eine Kostenüberschreitung von 15% einzukalkulieren ist?

3. Gegeben ist das Dreieck ABC
   A(-7/-7), B(9/1), C(-1/11)
   Ermittle die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U, des Höhenschnittpunkts H sowie der Seitenmittelpunkte D, E, F und zeige:

- U ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks DEF
- Der Mittelpunkt der Strecke UH ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks DEF.

4. $f(x) = \frac{-x^3}{18} + \frac{x^2}{2}$
   - Berechne Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte und zeichne den Graphen der Funktion.
   - Erkläre den Begriff "Wendepunkt" und weise mit Hilfe der Definition die Existenz einer Wendestelle nach!
   - Verbinde den Koordinatenursprung mit dem Maximum und zeige, dass die beiden Flächen zwischen der Kurve und dieser Geraden gleich groß sind!

12 2004/05 8B Egger

1. Von einem gleichschenkligen Trapez kennt man die Länge der Parallelseite a = 134cm und die Länge der Diagonale e = 108cm. Der der Seite b gegenüberliegende Winkel zwischen den Diagonalen ist 48°.
   - Berechne die Länge der Seite b und den Winkel = ∠DAB des Trapezes.
   - Berechne den Flächeninhalt des Trapezes auf drei Dezimalen genau.
   - Das Trapez dreht sich um die längere Parallelseite. Berechne das Volumen und die Oberfläche des so entstehenden Körpers auf drei Dezimalen genau.
   - Durch die Drehung entsteht ein Körper, der die Gestalt eines Zylinders mit zwei angesetzten Kegeln besitzt. Einem solchen Kegel ist ein Quader (a, H) von maximalen Volumen einzuschreiben. Berechne die Maße des eingeschriebenen Körpers. Runde zur Lösung der Aufgabe c) die Größen des Kegels auf zwei Dezimalen.
2. Eine Hyperbel in Hauptlage sei durch den Anstieg einer Asymptote $k = \frac{4}{3}$ und den Punkt $P(\sqrt{3}2/4)$ gegeben.
   - Gib die Gleichung der Hyperbel an.
   - Durch Rotation des Hyperbelbogens um die y-Achse im Intervall [3,6] entsteht ein Becher. In diesem Becher liegt eine Kugel, die sowohl die Basis als auch den Hyperbelbogen berührt. Wie groß ist der unter der Kugel frei bleibende Raum.
   - In den unter der Kugel befindlichen Raum wird Wasser gefüllt. Dieses wird in einen Kelch geschüttet, der durch Rotation der Parabel $y^2 = 2x$ um die x-Achse entsteht. Wie hoch steht das Wasser in diesem Kelch?
3. Gegeben ist ein Dreieck ABC: A(-4/4), B(10/6), C(2/-2).

- Berechne die Koordinaten des Inkreismittelpunktes, des Schwerpunktes S, des Höhenschnittpunktes H und des Umkreismittelpunktes U.
- Gib die Gleichungen des Umkreises und des Inkreises an.
- Stelle die Eulersche Gerade auf, zeige, dass einer der vier speziellen Punkte nicht darauf liegt, wohl aber die drei anderen.
- In den Punkten A und C sind die Tangenten zu legen und ihr Schnittpunkt sowie ihr Schnittwinkel sind zu berechnen.

4. Es seien die Funktionen g(x) und f(x) gegeben. Dabei ist f(x) einer Polynomfunktion vierten Grades. Ihr Graph besitzt im Ursprung einen Terrassenpunkt. Die Tangente an der Stelle 1 ist parallel zur Geraden $h : y = 2x - 6$. Der Graph schließt mit der x Achse im Intervall [0,2] eine Fläche ein, deren Inhalt $A = \frac{8}{5}$ beträgt.

    - Gib die Funktionsgleichung an.
    - Untersuche die Kurve bezüglich Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Monotonie und Krümmungsverhalten.
    - Gib die Gleichung der Wendetangente an.
    - Fertige eine Zeichnung von f(x), g(x) und der Tangente an. (Einheit 1cm)
    - Die beiden Graphen von f(x) und g(x) begrenzen ein Flächenstück. Berechne den Inhalt dieser Fläche auf drei Dezimalen genau.

13 2004/05 8C Errenst

1. Eine achsensymmetrische Polynomfunktion 4.Ordnung hat im Punkt P(2/0) einen Wendepunkt mit der Steigung -4.

    - Ermittle die Funktionsgleichung von f(x)
    - Diskutiere die Funktion auf Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte und zeichne den Funktionsgraphen im Intervall [-5;5]
    - Berechne den Inhalt des Flächenstücks A_1, das der Graph mit den Wendetangenten einschließt, und den Gesamtinhalt A_2 der Flächenstücke, die der Graph mit der x-Achse einschließt. In welchem Zahlenverhältnis stehen A_1 und A_2 zueinander?

2. Bestimme für das Dreieck ABC mit A(4/-8), B(10/4), C(-6/12) die Koordinaten des Inkreismittelpunktes I. Zeige, dass die Symmetralen der Strecken IA, IB, IC ein Dreieck bilden, dessen Eckpunkte P, Q, R auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen.

3. Am Maturaball werden 1000 Lose ver-kauft, darunter 300 Gewinnlose.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter 5 Losen mindestens 2 Gewinne zu haben?
- Wie viele Lose muss man kaufen, um mit mindestens 99%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Gewinn zu erhalten?
- Neben dem Losverkauf gibt es ein Glücks-rad, das in gleich große Sektoren von 1 bis 36 eingeteilt ist. Hier darf der Ballbesucher, ohne Einsatz zahlen zu müssen dreimal drehen. Kommt bei jeder Drehung eine Quadratzahl, so gewinnt er 10€. Bei nur zwei Quadratzahlen und einer weiteren Zahl, die nicht Primzahl sein darf gibt es 5€und für eine Quadratzahl (und sonst keine Primzahl) bei dreimal Drehen erhält er 1€. Erwischt er aber mindestens eine Primzahl, so muss der Unglückliche 2€ zahlen. (Bemerkung: Es geht also um Primzahlen, Quadratzahlen und "Wedernoch"-Zahlen). Berechne die Gewinnerwartung und entscheide anhand dessen, ob dieses Spiel fair ist.

4. Von einem viereckigen Grundstück kennt man: a=60m, b=90m, d=50m, a=90°, b = 135°.
   - Berechne die Länge der Seite c und die Größe der Winkel g und d dieses Grund-stücks.
   - Zwei Personen haben das Grundstück zu gleichen Teilen geerbt, wobei die Teilungslinie für die beiden Grundstückshälften parallel zur Seite a verlaufen soll. Berechne den Abstand dieser Parallelen von a. Wie viel kostet ein Zaun längs der Teilungslinie, wenn 35€ pro Laufmeter verrechnet werden?

14 2004/05 8D Schmidhofer

1. - Zwei geradlinig verlaufende Straßen bilden an ihrer Kreuzung einen Winkel von etwa 53°. Diese Kreuzung soll durch ein zusätzliches Straßenstück entlastet werden. Die Situation kann in einem Koordinatensystem durch die Geraden $y = 0.5x$ und $y = -0.5x$ dargestellt werden. Die Verbindungskurve hat die Form $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ und mündet an den Stellen -2 und 2 ohne Knick in die Geraden ein (Maßangaben in km). An den Übergangsstellen soll außerdem f"(-2) = f"(2) = 0 gelten. Bestimme den Funktionsterm von f(x).
   - Ein weiterer Vorschlag sieht als Verbindungskurve g vor mit
     $$g(x) = 1 + \ln(0.125x^2 + 0.5)$$
     Prüfe, ob diese Kurve ebenfalls ohne Knick in die Geraden einmündet.
   - Die beiden Vorschläge sollen hinsichtlich des Landschaftsverbrauches verglichen werden, indem jeweils der Inhalt des Flächenstücks zwischen den Geraden und der Verbindungskurve bestimmt wird. Der Landschaftsverbrauch für die Kurve g(x) beträgt 0.282 km^2, berechne das entsprechende Flächenstück für die Polynomfunktion f(x).

2. Durch die Eckpunkte A (10/0/0), B (10/6/0), C (0/8/0), D (0/0/0), E (10/0/11), F (10/6/8), G (0/8/6) und H (0/0/10) ist ein Gebäude (Ausstellungspavillon) mit ebenen Seitenwänden gegeben, welches auf der xy-Ebene steht (Angaben in Meter). E, F, G, H sind die Eckpunkte der Dachfläche. Berechne die Grundfläche ABCD und zeige, dass die Eckpunkte der Dachfläche in einer Ebene liegen. Falls die Dachneigung (Winkel zwischen Dach- und der xy Ebene) größer als 30°ist, muss ein Schneefanggitter angebracht werden. Überprüfe, ob dies der Fall ist. Ein Teil der Außenwand BCGF ist verglast, durch diese Glasfläche fällt paralleles Sonnenlicht ein, wobei zu einem bestimmten Zeitpunkt der Lichtstrahl durch den Vektor l = (1/-4/-2) beschrieben werden kann. In welchem Punkt trifft der Lichtstrahl durch die Ecke G an der gegenüberliegenden Wand ADHE (xz - Ebene) auf?

3. - Welche Maße muss eine zylindrische Dose haben, damit ihr Volumen 500 cm^3 beträgt und der Materialverbrauch am kleinsten ist?
   - Handelsübliche Getränkedosen (0.5 Liter) haben einen Durchmesser von 6.5 cm. Um wie viel Prozent ist der Materialverbrauch einer solchen Dose größer als der Minimalwert?
   - Bestimme allgemein, bei welchem Verhältnis r : h ein Drehzylinder mit vorgegebenem Volumen V minimalen Oberflächeninhalt hat

4. Der Konzern Electronix stellt Mikrochips in Massenproduktion her. Jeder hergestellte Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 15% fehlerhaft.

   - Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 20 Chips weniger als 3 fehlerhaft?
   - Wie viele Chips müssen der Produktion mindestens entnommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens ein fehlerhafter dabei ist?
   - Bestimme das kleinstmögliche Intervall mit dem Mittelpunkt 15, in dem bei insgesamt 100 Chips die Anzahl der fehlerhaften Chips mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% liegt.
   - Der Konzern beauftragt ein Expertenteam mit Maßnahmen zur Qualitätsverbesserung. Falls der Anteil der fehlerhaften Chips deutlich gesenkt werden kann, wird dem Team eine Prämie gezahlt. Nach Abschluss der Verbesserungsmaßnahmen wird der Produktion eine Stichprobe von 200 Chips entnommen. Befinden sich darunter höchstens 22 fehlerhafte, wird die Prämie gewährt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dem Team die Prämie verweigert, obwohl der Anteil der fehlerhaften Chips auf 10 % gesunken ist?

15 2003/04 8A Pfeiler

1. China und Indien sind die beiden bevölkerungsreichsten Staaten der Erde (Angaben in Millionen):

Jahr	Einwohner von China	Einwohner von Indien
1998	1260	970
2003	287	1050

- Gib unter der Annahme exponentiellen Wachstums die Bevölkerungszunahme beider Staaten als Funktion der Zeit (in Jahren) an.
- Zeige: $N(t) = N_O \cdot e^{kt}$ ist Lösung der Differentialgleichung $N'(t) = k \cdot N(t)$
- Um wie viel Prozent nimmt die Bevölkerung in beiden Staaten jährlich zu?
- Berechne die Verdoppelungszeit des Bevölkerungswachstums dieser Staaten.
- In welchem Jahr werden – bei gleicher Entwicklung wie bisher – in beiden Staaten gleich viele Menschen leben?

2. Die Sunkist Saftpackerl hatten vor 20 Jahren die Form von Tetraedern. Ein Modell dieser Verpackungen sei gegeben durch: das Dreieck ABC und die Spitze S mit S = g - h

$$g : X = \begin{matrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{matrix} + t \cdot \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}$$

$$h : X = \begin{matrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{matrix} + s \cdot \begin{matrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$$

A (-4/-9/1); B(3/3/-?); C(6/-1/-3)

- Zeige, dass die beiden Geraden einander schneiden und bestimme die Koordinaten von S.
- Berechne den Winkel a = ∠BAC und den Flächeninhalt der Grundfläche.
- Berechne das Volumen des Tetraeders.
- Berechne die Länge eines Strohhalmes, der, wenn man ihn senkrecht zur Grundfläche durch S in die Packung steckt, noch 2cm herausragt. Fertige eine Skizze an.
- Berechne die Koordinaten des Fußpunktes F der Körperhöhe, sowie jene des Punktes S', den man durch Spiegelung der Spitze S an der Grundfläche erhält. [Maße in cm]

3. Von einer Schmugglerbande wurde einmal eines der berühmten Faberge Eier gestohlen. Das Besondere an diesem Ei ist, dass es aus purem Gold gefertigt wurde und innen einen Hohlraum in Form eines Kegels hat.
Man kann nun annehmen, dass dieses besondere Ei durch Rotation der Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ um die x-Achse entsteht und der Hohlraum gebildet wird, indem man dieser Ellipse den volumsgrößten Kegel so einschreibt, dass die Spitze

im linken Hauptscheitel der Ellipse liegt und seine Achsen mit jenen der Ellipse zusammenfallen. [Maße in cm]

- Fertige eine Skizze, bestimme Radius und Höhe des Kegels und berechne sein Volumen
- Berechne das Volumen der verbleibenden Eischale und berechne die Masse, wenn man weiß, dass Gold eine Dichte von $19.3\frac{g}{cm^3}$ hat
- Dieselbe Schmugglerbande wollte nun dieses wertvolle Ei außer Landes bringen. Zu diesem Zweck mischten sich 28 Schmuggler unter eine 62-köpfige Reisegruppe. Der Zöllner wählte 7 Personen aus und verhaftete jeden Schmuggler sofort.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mehr als drei Schmuggler erwischt wurden?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ei nicht gefunden wurde?

4. Ein Anhänger aus Gold entsteht durch Rotation jener Fläche um die y-Achse, die von den beiden Funktionen f(x) und g(x) eingeschlossen wird. [Maße in cm] $f(x) = ax^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $g(x) = \sqrt{2}x^4$
   - Berechne a und b für den Fall, dass sich die beiden Funktionen im Punkt A (1/2) berühren.
   - Zeichne und beiden Funktionen f und g berechne jene Fläche F, die von den beiden Funktionen und der y-Achse eingeschlossen wird
   - Bestimme die Tangente t im Punkt A an die beiden Funktionen und beweise, dass t die Fläche F in zwei gleich große Teilflächen zerlegt.
   - Der bei Rotation der Fläche F um die y-Achse entstehende Anhänger soll aus Gold gefertigt werden. Skizziere seine Form und berechne seine Masse

16 2003/04 8BE Errenst

1. Eine Polynomfunktion 3. Ordnung besitzt den Wendepunkt W(O/0) und den Tiefpunkt ? In ihrer positiven Nullstelle wird sie von einer Polyriornfunkfion 2. Ordnung berührt, welche ochsensymmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Bestimme die Gleichungen beider Polynomfunktionen, diskutiere sie und zeichne ihre Graphen in [-7;7]. Unter welchem Winkel schneiden die Polynomfunktionen einander im linken Schnittpunkt? Bestimme den Inhalt des Flächenstückes, das von den beiden Funktionsgraphen eingeschlossen wird.

2. Ein Hobbyschütze hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 65%. Berechne jeweils mittels geeigneter Verteilung (Binomial- bzw. Normalverteilung) auf 3 Dezimalen genau:

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 12 Schüssen genau 6 Treffer zu erzielen?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 10 Schüssen höchstens 7 Treffer zu erzielen bzw. bei 20 Schüssen mindestens 13 Treffer zu erzielen?
- Wie oft muss er schießen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Treffer zu erzielen, 98% übersteigt?
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei 300 Schüssen mindestens 200 Treffer zu erzielen.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 Schüssen die Anzahl der Treffer um mehr als 10 vom erwarteten Wert abweicht?
- Er schießt 500mal. In welchem (symmetrischen) Bereich um den Erwartungswert liegt die Anzahl der Treffer mit 90%iger Sicherheit?

3. Ein viereckiges Grundstück ABCD ist durch die Länge der drei Seiten AB a = 63.4m, BC = b = 62m, DA = d = 15.3m und die beiden Winkel α = 87.3°und β = 115.6°gegeben. Berechne die Länge der f ehlenden Seite, die fehlenden Winkel und den Flächeninhalt des Grundstückes. Eine von A ausgehende Teilungslinie soll das Grundstück in zwei flächengleiche Teile teilen. Berechne, wie weit der auf der Seite BC liegende Endpunkt E dieser Teilungslinie von B entfernt ist.

4. Zwei Orte A und B sind 26km voneinander entfernt und haben zur nahegelegenen, geradlinigen Meeresküste einen Abstand von 10km bzw. 20km. Die Landesregierung beschließt, an der Küste eine Trinkwasseranlage C zu bauen, von welcher aus geradlinige Wasserleitungen zu den Orten A und B verlaufen sollen. Dabei soll die Gesamtstrecke der beiden Wasserleitungen aus Kostengründen möglichst gering sein. Wie lang ist diese Gesamtstrecke ?

17 2003/04 8C Egger

1. Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = e^x \sin x$ und $g(x) = e^x$

   - Bestimme Nullpunkte, Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion f(x) und untersuche das Monotonieverhalten und die Krümmung des Graphen im Intervall [-n, n]. Fertige im Intervall [-n, n] eine genaue Zeichnung von f(x) anhand der Ergebnisse und von g(x) anhand einer Wertetabelle an.
   - Die y-Achse, f(x) und g(x) schließen eine Fläche ein. Berechne ihren Inhalt.
   - Schätze den Inhalt jener Fläche, den der Graph der Funktion $g(x) = e^x$ mit der x-Achse im Intervall [0,1] einschließt mittels Ober- und Untersummen ab, wobei 10 Teilintervalle zu bilden sind.
   - In wie viele Teilintervalle müsste das Intervall zerlegt werden, damit die Differenz zwischen Ober- und Untersummen kleiner als $E = 0.01$ wird?

2. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(2/2/4), B(6/0/0) und D(0/6/0) gegeben sowie die Ebene E_1: $1Ox + 4y - z - 60 = 0 (B, C \in E)$

   - Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Höhe h=6, wobei der Mittelpunkt des Quadrats gleich der Fußpunkt der Pyramide ist. Berechne die Koordinaten von C sowie die der Spitze S (Gib beide Lösungen für S an).
   - Die Ebene E zerschneidet die Pyramide in zwei Teilkörper. Welche Schnittfläche entsteht? Beweise deine Annahme. Berechne das Volumen des Teilkörpers mit der Spitze S(7/7/2) und gib das Verhältnis dieses Volumens zum Volumen der ganzen Pyramide an.
   - Welchen Winkel schließt die Ebene E mit der Grundfläche ein?
   - Gegeben sei die Gerade g: ? (fehlt)
   - Zeige: Das Volumen der Pyramide ändert sich nicht, wenn die Spitze S(7/7/2) auf der Geraden wandert.

3. - Wie lautet die Gleichung jener Ellipse, die durch den Punkt P(5/3) ver-läuft und einen minimalen Flächeninhalt einschließt?
   - Ein Ellipsoid entsteht durch Drehung dieser Ellipse $9x^2 + 50y^2 = 450$ um die x-Achse. Dem Ellipsoid soll ein Zylinder mit möglichst großem Volumen eingeschrieben werden. Gib den Radius und die Höhe des Zylinders an.
   - Der Ellipsoid erhält eine Durchbohrung von kreisförmigen Querschnitt, wobei der Radius der Durchbohrung gleich dem Radius des Zylinders ist. Man bestimme das Volumen des ringförmigen Restkörpers.

4. Ein allgemeines Viereck ABCD ist durch die Länge der Seiten AB=a=317cm, BC=b=310cm, DA=76cm und die Winkel f=¿DAB=87.3°und β=¿ABC=115.6°gegeben.

   - Berechne die Länge der fehlenden Seite CD=c und die fehlenden Winkel und ? und $\chi = \angle$BC.
   - Eine durch A gehende Gerade g soll das Viereck in zwei flächengleiche Teile teilen. Bestimme, ob die Gerade g die Seite oder die Seite schneidet. Bestimme, wie weit dieser Schnittpunkt von C entfernt liegt.
   - Das gegebenen Viereck ABCD ist in ein flächengleiches Parallelogramm zu verwandeln. Dabei sollen der Winkel f und die Länge der Seite d=AD unverändert bleiben.
     Berechne die zweite Länge des Parallelogramms und die Höhe h_a.

18 2002/03 8A Lientschnig

1. Von einem in einer Ebene liegenden viereckigen Gründstück ABCD kennt man die folgenden Bestimmungsstücke: AB=93m; BC=48m; $\angle$ABC=135°; $\angle$ABD=25°; $\angle$DAB=105°

- Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1:1000 an.
- Berechne die Längen der Diagonalen AC und BD sowie den Flächeninhalt des Grundstückes ABCD.
- Im Zuge eines Kommassierungsverfahrens soll dieses Grundstück in ein flächengleiches Grundstück ABC*D* mit parallelogrammförmigem Grundriss transformiert werden, wobei C* auf der Verlängerung der Grundstücksgrenze BC über C hinaus liegen soll.
- Wie viele Meter muss C* von C entfernt sein. (10 Punkte)

2. Von einer Polynomfunktion f ist die 1. Ableitung mit $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ gegeben. Bestimme die Funktionsgleichung von f, wenn ihr Graf durch den Punkt P(4/-3) geht.
   Berechne die Koordinaten der Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte, beschreibe Monotonie und Krümmung und zeichne den Grafen der Funktion (Einheit: 1cm).
   Die Tangenten in den beiden Punkten W_1(-2/0) und W_2(2/0) schließen mit dem Grafen der Funktion f ein Flächenstück und mit der x-Achse eine Dreiecksfläche ein. Berechne das Verhältnis dieser beiden Flächeninhalte. (10 Punkte)

3. Die Geraden $a : 2x - y = 13$ und $b : x + 2y = -6$ und $c : 2x + y = -9$ sind Trägergeraden der Seiten des Dreiecks ABC.

   - Berechne die Koordinaten der Eckpunkte und die Innenwinkel des Dreiecks!
   - Berechne den Flächeninhalt und zeichne das Dreieck!
   - Ermittle die Gleichung des Umkreises!
   - Berechne den Höhenschnittpunkt!

   (10 Punkte)

4. Eine Ellipse und eine Hyperbel in jeweils 1. Hauptlage haben den gemeinsamen Brennpunkt F_2(2/0) und schneiden sich in S(2/3). Ermittle die Gleichungen der Kegelschnitte. Zeige, dass sich die Ellipse und die Hyperbel in S (x¿0/y¿0) rechtwinkelig schneiden. Die Tangenten in S schneiden die x-Achse in den Punkten P_1 und P_2 bzw. Die y-Achse in Q_1 und Q_2. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der beiden Dreiecke P_1P_2S und Q_1Q_2S?

19 2002/03 8B Peterl

1. Gegeben ist das Dreieck ABC A(12/0), B(-15/-9), C(20/-16). Ermittle die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H und zeige:

   - A, B, C, und H liegen auf einer Hyperbel in erster Hauptlage.

- Der zu H bezüglich des Koordinatenursprungs symmetrisch liegende Hyperbelpunkt H' liegt auf dem Umkreis des Dreiecks.

2. Bei der Tombola eines Schulfests werden insgesamt 1000 Lose ausgegeben, 300 davon sind Gewinnlose.
   - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter fünf gekauften Losen (1) genau zwei (2) mindestens zwei Gewinnlose zu haben?
   - Wie viele Lose muss man kaufen, um mit 90%iger Wahrscheinlichkeit mit mindestens einem Gewinn rechnen zu können?
   - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Gewinnlose unter 100 verkauften Losen um mehr als drei vom erwarteten Wert abweicht?
   - Wie groß müsste der Anteil p der Gewinnlose sein, damit man beim Kauf von fünf Losen mit 99%iger Wahrscheinlichkeit mit einem Gewinn rechnen kann?

3. - Berechne die Polynomfunktion 3. Grades, die die Nullstellen 1 und 0 und die Punkte (3/3) und (-1/-1) besitzt!
   - Ermittle weitere Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte dieser Funktion!

   $$f(x) = x^3 - x^2 + x$$

   - Zeichne den Graphen der Kurve in einem geeigneten Intervall!
   - Berechne den Inhalt der Fläche, die die Kurve mit der x-Achse einschließt!
   - Die durch $x = O$ und $x = 1$ begrenzte Fläche rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers!

4. Die Punkte A und B liegen auf verschiedenen Seiten einer Talfurche. Sie sollen durch eine Straßenbrücke miteinander verbunden werden. Zur Vermessung der Brückenlänge wird auf einer Seite des Tales in der Horizontalebene von A und B eine Standlinie mit der Länge s=CD=450m abgesteckt. Von C und D aus werden folgende Winkel gemessen: ∠ACB=a=32.5°, ∠BCD=β=56.4°, ∠ADC=y=39.1°und ∠ADB=d=41.3°. Berechne den Richtpreis für das Bauvorhaben, wenn für 1m Brückenlänge 12.000 Euro angenommen werden!

20 2002/03 8C Lechner

1. (10 Punkte) Berechne das Volumen eines Trinkglases: Das Glas hat außen die Gestalt eines halben Hyperboloids, das durch Rotation einer Hyperbel in erster Hauptlage (a=3cm) um die y-Achse entsteht. Am oberen Rand des Glases beträgt der äußere Durchmesser 10cm, der innere Durchmesser 9cm. Die gesamte Höhe mißt 10cm; die Tiefe beträgt 9cm. Der Innenraum hat die Gestalt eines Rotationsparaboloids um die y-Achse.

- Bestimme die Gleichungen der Hyperbel und der Parabel, durch deren Rotation das Glas entsteht.
- Zeichne die Hyperbel und die Parabel mit der Einheit E = 1cm.
- Berechne das Volumen des Innenraumes
- Die Dichte des Glases beträgt: r=2.6g/cm^3. Welche Masse hat das Glas?
- Auf welcher y-Höhe hat das Glas ca. die dünnste Wanddicke?

2. (10 Punkte) Eine Computerfirma kauft Microchips bei drei verschiedenen Firmen ein. 1600 Stück bei Fa. A, 1000 Stück bei Fa. B, 1400 Stück bei Fa. C. Erfahrungsgemäß weiß man, dass 2% der vom Betrieb A, 5% der vom Betrieb B und 3% der vom Betrieb C hergestellten Chips fehlerhaft sind.

   - Wie viele Stück sind insgesamt fehlerhaft?
   - - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Chip fehlerhaft ist?
     - Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein solcher fehlerhafter Chip vom Betrieb A?
     - Ein zufällig ausgewählter Chip erweist sich als fehlerfrei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt dieser vom Betrieb A?
   - Wie viele Stücke müssen bei einer Stichprobenkontrolle der Gesamtlieferung geprüft werden, damit mit mindestens 97%-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens ein fehlerhafter Chip gefunden wird?

3. (10 Punkte) Ein Waldstück hat die Form eines Vierecks ABCD. Bekannt sind die Seiten a=634m; b=620m; d=459m; und die Winkel a=87.3°; β=115.6°. (Teile mit der Diagonale e!)
   Dieses Waldstück haben 2 Brüder zu gleichen Teilen geerbt. Eine geradlinige Grenze durch A soll das Waldstück in zwei flächengleiche Teile zerlegen. Trifft die Grenze die Seite BC oder CD?

   - Wie groß sind Flächeninhalt und Umfang dieses gesamten Waldstückes?
   - - Der Holzbestand des gesamten Waldstückes wächst erfahrungsgemäß um 3,6% pro Jahr. Nach wie vielen Jahren wird er sich verdoppelt bzw. verdreifacht haben?
     - Vor wie vielen Jahren war der Holzbe-stand nur 75% vom heutigen Bestand?
     - Heute beträgt der Holzbestand 7400m^3. Man hat vor, in 3 Jahren 2000m^3 zu Schlägern. Wann wird dann der heutige Holzbestand wieder erreicht werden?
     - Unter besseren Bedingungen verdoppelt sich der Holzbestand schon in 12 Jahren. Um wieviel Prozent wächst dann der Holzbestand pro Jahr?

4. (10 Punkte; Teil A = 5 Punkte; Teil B = 5 Punkte)

Klasse	Merkmal Klassenmitten
1	$4700 < x < 4800$?
2	$4800 < x < 4900$
3	$4900 < x < 5000$
4	$5000 < x < 5100$

abs.Häufigk.	abs.H/Klassenbr.=Histogr.
3	$3/1(00) = 3$cm
5	$5/1(00) = 5$cm
9	$9/1(00) = 9$cm
10	$10/1(00) = 10$cm
n=27	

- Teil A: Aus der Statistik: Um die Qualität eines Spanndrahtes einer Kabelleitung bezüglich seiner Reißfestigkeit zu überprüfen, werden 2m lange Stücke so lange belastet bis es zum Bruch kommt. Eine an 27 Stücken vorgenommene Meßreihe brachte folgende Belastungen in Newton. Die Stücke werden in 4 Klassen eingeteilt.
  - Suche die Klassenmitten
  - Zeichne ein Histogramm, dessen Klassenbreite jeweils 100 N=1cm ist
  - Berechne den Mittelwert X mit Hilfe der Klassenmitten und der absoluten Häufigkeiten.
  - Berechne Varianz und Standardabweichung. Wieviel % beträgt die Standardabweichung?
- Teil B: Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Binomialverteilung: Christoph und Susi spielen gleich gut Tennis. Das heißt: vor jedem Spiel hat jeder eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$. Was ist wahrscheinlicher
  - dass Christoph 3 von 4 Spielen oder Susi 5 von 8 Spielen gewinnt?
  - dass Christoph mindestens 3 von 4 Spielen gewinnt oder dass Susi mindestens 5 von 8 Spielen gewinnt?

21 2002/03 8C Wiltsche

1. Unmittelbar neben einer geraden, horizontalen Strasse AB wird ein steil ansteigendes, ebenes Gelände ABD, das bis zum Gipfel D des Berges ansteigt, abgeholzt. Nach Meinungen von Experten ist ein Hang in dieser Lage lawinen-gefährdet, wenn seine Neigung größer als 40°beträgt. Zur Einschätzung der Lawinengefahr wird der Hang vermessen. AB=c=800m, der Höhenwinkel von A zu D ist α=36.3°; der Horizontalwinkel zwischen der Standlinie AB und der Vertikalebene, in der AD liegt,

ist γ=53.2°. Der Horizontalwinkel zwischen der Standlinie AB und der Vertikalebene, in der BD liegt, ist d=47.8°. Berechne die relative Höhe der Bergspitze D, den Neigungswinkel w des Hanges und entscheide, ob ein Lawinenabgang zu befürchten ist. Wenn Lawinengefährdung vorliegt, berechne die Entfernung des gefährdetsten Punktes E der Strasse von A. Berechne, unter welchem Höhenwinkel β die Bergspitze D von B aus erscheint.

2. Die rechte Halbachse a=6cm der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 36$ ist Durchmesser eines Kreises. Stelle die Kreisgleichung auf und konstruiere die beiden Kegelschnitte. Der außerhalb der Ellipse liegende Teil des Kreises rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen dieses Rotationskörpers. Der Ellipse soll das flächengrößte gleichschenklige Dreieck eingeschrieben wer-den, dessen Spitze im Ursprung liegt und dessen Basis parallel zur y-Achse liegt. Berechne dessen Fläche.

3. In einer Großstadt sind erfahrungsgemäß 6% der U-Bahn-Fahrgäste Schwarzfahrer.

   - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem U-Bahn-Waggon mit 50 Fahrgästen (1) genau zwei Schwarzfahrer, (2) mindestens drei Schwarzfahrer befinden.
   - Unter wie vielen Fahrgästen ist mit 90% iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Schwarzfahrer zu erwarten?
   - Ein Kontrolleur überprüft täglich etwa 300 Fahrgäste. Gib an, wie viele Schwarzfahrer er täglich im Mittel antrifft.
   - Berechne die Wahrscheinlichkeit, täglich weniger als 20 Schwarzfahrer anzutreffen.
   - Gib ein symmetrisches Intervall an, in dem mit 95%iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Schwarzfahrer liegt, die er an einem Tag antrifft.

4. Ermittle alle Nullstellen, Extrem- und Wendestellen der reellen Funktion $f(x) = (x-3)\cdot e^{x/3}$ und zeichne den Funktionsgraphen im Intervall [-8;4]. Zeige, dass die Wendetangente und die Tangente in der Nullstelle aufeinander normal stehen. Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das vom Funktionsgraphen und den beiden Koordinatenachsen begrenzt wird.

22 2001/02 8A Kerschbaumer

1. Eine Ellipse in erster Hauptlage hat die Brennweite $3\sqrt{7}$ und schneidet eine Parabel $y = ax^2$ im Punkt P(3/4).

   - Ermittle die Gleichungen der beiden Kegelschnitte und berechne die Größe ihres Schnittwinkels.

- Das von der Parabel, der Parabeltangente in P und der x-Achse begrenzte Flächenstück rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers.
- Schreibe dem Ellipsoid, das durch Rotation der Ellipse um die x-Achse entsteht, den volumsgrößten Drehkegel ein, dessen Spitze im linken Hauptscheitel der Ellipse liegt.

2. Ein Test besteht aus 8 Fragen, bei denen jeweils von drei vorgegebenen Antwortmöglichkeiten die richtige anzukreuzen ist. Für mindestens 5 richtige Antworten gibt es eine positive Note.

   - Ein Schüler hat nichts gelernt und kreuzt nur willkürlich an. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er
     - alle Antworten richtig hat,
     - mindestens eine Antwort richtig hat,
     - eine positive Note bekommt.
   - Wie viele Fragen darf ein Test mit jeweils drei vorgegebenen Antwortmöglichkeiten haben, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nur willkürlich ankreuzender Schüler alle Fragen richtig beantwortet, erstmals über 1% liegt?
   - Ein Schüler weiß die Antwort auf 2 Fragen, den Rest kreuzt er willkürlich an. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er
     - mindestens 7 Antworten richtig hat,
     - eine positive Note bekommt.
   - Bei einer Aufnahmsprüfung werden 100 Fragen gestellt, wobei jeweils 4 Antwortmöglichkeiten zur Verfügung stehen. Bei mindestens 50 richtigen Antworten wird man aufgenommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein rein zufällig ankreuzender Kandidat die Aufnahmsprüfung besteht? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen 20 und 30 Fragen richtig beantwortet?

3. $$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{2 \cdot x}$$

   Diskutiere die Funktion! Zeichne den Graph im [-9,9]. Berechne die von f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.

4. Von einem Viereck kennt man die Seitenlängen AB=a=8m, BC=b=6m und AD=d=7m sowie die Winkelmaße u=$\angle$DAB=75°und β=$\angle$ABC=60°. Berechne Umfang und Flächeninhalt des Vierecks. Verlängert man die Seite AD über D hinaus und die Seite BC über C hinaus, so schneiden sich die Verlängerungen in einem Punkt F. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks CDF sowie den Abstand des Punktes F von den Seiten AB bzw. CD des Vierecks.

23 2001/02 8C Lechner

1. (10 Punkte) Der Marktanteil der Firmen A, B, C für ein bestimmtes Gerät beträgt für die Firma A = 40%, das sind 640 Geräte für die Firma B = 35%, das sind 560 Geräte und für die Firma C = 25 %, das sind 400 Geräte.
   Statistische Untersuchungen ergaben, dass die Firma A eine Ausschussquote von 5% hat, die Firma B eine Ausschussquote von 3,2% und die Firma C eine Ausschussquote von 2%.

   - Zeichne das dazugehörige Baumdiagramm.
   - Wie viele aller gelieferten Geräte sind fehlerhaft (Ausschuss)? Gib auch den prozentuellen Anteil an.
   - Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein defektes Gerät
     - Von der Firma A
     - Von der Firma B
     - Von der Firma C?
   - Wie viele Geräte müssen bei einer Qualitätskontrolle geprüft werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% mindestens ein defektes Gerät zu entdecken?

2. (10 Punkte) Gegeben ist ein Kreis $k : (x + 6)^2 + (y + 5)^2 = 125$ und eine Gerade $g : X = (2/1) + s(3/ - 4)$

   - Bestimme den Mittelpunkt des Kreises und dessen Radius.
   - Bestimme die Schnittpunkte von Kreis und Gerade.
   - Berechne die Länge der auf g liegenden Sehne (S1 S2).
   - Berechne den Abstand der Geraden vom Kreismittelpunkt.
   - Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks M S1 S2.
   - Stelle die Gleichung der Geraden h auf, die normal zur Geraden g steht und durch den Kreismittelpunkt geht.
   - Berechne den Winkel zwischen S1 M S2.
   - Stelle die Gleichungen der Tangenten in S1 und S2 auf und berechne den Schnittpunkt dieser Tangenten.

3. (10 Punkte)

   - Berechne die Höhe eines Flugzeuges, welches in A unter dem Höhenwinkel j = 50.36°in nord-östlicher Richtung gesehen wird und gleichzeitig in B unter dem Höhenwinkel y = 66.45°auch in nordöstlicher Richtung gesehen wird, wenn die Standlinie AB = c = 1500m beträgt.
   - Dieses Flugzeug hat eine Eigengeschwindigkeit von 800 km/h. Es weht jedoch Ostwind mit einer Geschwindigkeit von 20 m/sec,

Punkte	Note	abs. H.
0...5	5	8
6...9	4	22
10...13	3	25
14...17	2	13
18...20	1	7

- Berechne die tatsächliche Geschwindigkeit v des Flugzeuges, die vom wehenden Ostwind beeinträchtigt wird.
- Um tatsächlich in Richtung Norden fliegen zu können, muß der Pilot in eine nordöstliche Richtung steuern. Wie groß ist dann seine tatsächliche Geschwindigkeit?

4. (10 Punkte) Bei einem Test können bis zu 20 Punkte erreicht werden. Die Ergebnisse von 75 Testpersonen sind in nachfolgender Häufigkeitstabelle zusammengestellt.
   Punkte 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
   abs.H. 0 0 2 1 3 2 5 4 6 7 08 06 07 04 05 03 04 01 04 02 01
   Für die Benotung wird folgender Maß-stab gewählt:

   - Die Tabelle wird in 5 Klassen einge-teilt: [0;5,5];[5,5;9,5];[9,5;13,5]; [13,5;17,5]; [17,5;20]. Zeichne ein Diagramm.
   - Berechne den Mittelwert mit Hilfe der Klassenmitten.
   - Berechne Varianz und Standardabweichung.
   - Interpretiere das Ergebnis.

24 2001/02 8D Posch

1. Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = 2\sqrt{2x} und g(x) = x \cdot \sqrt{2x}$$

   - Erstelle mit dem Rechner Wertetabellen für beide Funktionen im Intervall [0,4], übertrage sie auf das Arbeitsblatt, zeichne die Graphen und berechne die Schnittpunkte und den Schnittwinkel im Schnittpunkt S2!
   - Wie ist der Begriff "streng monoton steigend" definiert? Zeige, daß beide Funktionen im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend sind!
   - Bestimme für die angegebenen Funktionen das Krümmungsverhalten!
   - Berechne die Fläche, die g(x) im Intervall [0,4] mit der x-Achse einschließt
     - näherungsweise mit Hilfe von Unter- und Obersummen (Wähle $\triangle$x =0.5!)
     - mit Hilfe eines Integrals!

v (kmh$^-1$)	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
Abs. Häuf.	25	35	52	84	120	135	100	61	41	33	14

- Das von beiden Graphen begrenzte Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers!

2. Eine gängige Verpackungsform für Getränke ist die zylinderförmige Aludose mit 0.5l Inhalt.

   - Gib eine Termdarstellung der Funktion O(x) an, wobei x der Radius und O(x) die Oberfläche einer solchen Dose (ohne Berücksichtigung von Verschnitten) ist! Skizziere den Graph in einem geeigneten Intervall!
   - Für welche Radiuslänge ist der Materialverbrauch minimal? (Runde auf mm genau!) Zeige, daß es sich um die kleinste Oberfläche handelt! Kennzeichne das Minimum auch im Graphen! Handelsübliche Getränkedosen haben einen Durchmesser von 6.5cm. Um wieviel Prozent ist der Materialverbrauch einer solchen Dose größer, als der Minimalwert?
   - Bestimme allgemein bei welchem Verhältnis r : h ein Drehzylinder mit vorgegebenem Volumen minimalen Oberflächeninhalt hat!

3. Wie ist die Ellipse definiert? Gib die Definition in Worten und in formaler Schreibweise an! Eine Ellipse in erster Hauptlage mit der Gleichung $x^2 + 4y^2 = 25$ enthält den Punkt P(3/y¿0).

   - Zeichne die Haupt- und Nebenscheitel und konstruiere mindestes drei weitere Punktepaare der Ellipse!
   - In jedem Punkt der Ellipse halbiert die Normale zur Tangente den Winkel zwischen den Brennstrahlen FP und FP! Bestätige diesen Satz für den Punkt P durch die Zeichnung und durch Rechnung! Was bedeutet dieser Satz für einen elliptischen Spiegel? Wo findet diese Eigenschaft eine praktische Anwendung?

4. - Die bei einer Verkehrskontrolle im Ortsgebiet einer Stadt gemessenen Geschwindigkeiten von 700 Pkw verteilen sich wie folgt:
     - Berechne mit Hilfe des Rechners das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung! Gib die zur Berechnung benötigten Formeln an!
     - Wir nehmen an, dass die gemessene Geschwindigkeit eine normal verteilte Zufallsvariable ist mit μ = x und s = s ist. Wieviel Prozent aller Pkw halten sich an die vorgeschriebene Geschwindigkeit?
     - Gib ein Intervall an, in dem die Geschwindigkeiten mit 90% Wahr-scheinlichkeit liegen und illustriere das Ergebnis an einer Skizze!
     - Der Polizeichef dieser Stadt behauptet, dass 25% der Autofahrer mit defekten Reifen fahren.

* Wie groß wäre demnach die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe vom Umfang 20 genau zwei mindestens drei Autos mit defekten Reifen zu finden?
* Jemand vermutet, dass dieser Anteil geringer als 25% ist und möchte dies mit einer Signifikanz von 0,01 testen. In einer Stichprobe vom Umfang 20 trifft er nur ein Auto mit defekten Reifen an. Führe den Test durch!
* Wann kann man mit der Normalverteilung rechnen? Inwiefern stellen normal verteilte Zufallsvariable eine Idealisierung dar?