Spezialthema Komplexe Zahlen

Lukas Prokop

31. Mai 2009

Dank an
Prof. Egger

"Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht,
alles weitere ist Menschenwerk"
(Leopold Kronecker[1])

[1] frei zitiert nach H. Weber "Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 2", 1886

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Definition

1.1 Beschreibung

Für Komplexe Zahlen definieren wir das Quadrat einer imaginären Einheit i als -1. Dies steht in Widerspruch mit unserer bisherigen Auffassung, dass es keine Wurzel aus einer negativen Zahl gibt. In der Tat kann unser Taschenrechner die Zahl nicht darstellen (Domain Error), jedoch werden wir sehen, dass man trotzdem sehr gut damit rechnen kann.

$$i^2 = -1$$
$$i = (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$$

Wir bezeichnen eine Zahl der Form $z = a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine Komplexe Zahl $\underline{z}$ (kartesische bzw. algebraische Form bzw. Binomialform bzw. Komponentendarstellung). Die Komplexe Zahl besteht aus zwei Teilen, weshalb sie auch diesen Namen bekam. i ist die imaginäre Einheit. Zahlen der Form $b \cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}$ heißen imaginäre Zahlen. Den Teil a der Komplexen Zahl bezeichnen wir als Realteil ($Re(\underline{z})$) und den Teil b als Imaginärteil ($Im(\underline{z})$). Da eine Multiplikation mit Null Null ergibt, kann jede reelle Zahl als Komplexe Zahl notiert werden. Ebenso kann mit $a = 0$ jede imaginäre Zahl abgebildet werden. Deshalb kann man die reellen Zahlen eine Untermenge der Komplexen Zahlen nennen ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Damit wir sie von den anderen Variablen unterscheiden können, notieren wir Komplexe Zahlen mit einem Unterstrich.

$$\underline{a} = a + 0 \cdot i$$
$$\underline{b} = 0 + b \cdot i$$

Möchten wir also die Wurzel aus -5 notieren, können wir es mit i^2 kombinieren und es als imaginäre Zahl notieren:

$$\sqrt{-5}$$
$$\sqrt{5 \cdot (-1)}$$
$$\sqrt{5i^2}$$
$$\sqrt{5}i$$

Als kleine Notiz sei noch erwähnt, dass in der Elektrotechnik die imaginäre Einheit i als j angeschrieben wird. Dadurch werden Verwechslungen mit der Stromstärke (als Variable i notiert) ausgeschlossen.

$$a + b \cdot j$$

1.2 Zuordnung in der Zahlentheorie

Es gab einen langen Kampf unter Mathematikern, ob die Komplexen Zahlen anerkannt werden sollten. Man kann drei Ereignisse nennen, die letztlich zur Aufnahme der Komplexen Zahlen als Teil der Mathematik führten:

- Ein analoge Arithmetik (Rechnen wie bei reellen Zahlen)
- Als Werkzeug zur Lösung von quadratischen Gleichungen mit $D < 0$
- Die geometrisch-trigonometrische Interpretation (von Gauß und Euler)

Die Komplexen Zahlen sind eine Menge von Zahlen auf die Addition, Substraktion, Multiplikation sowie Division angewandt werden kann ("algebraischer Körper"). Diese Menge besteht aus den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und der imaginären Einheit i. Nur mit Komplexen Zahlen lässt sich eine Gleichung der Form $x^2 + 1 = 0$ lösen.

1.3 Historik

Als erster Mathematiker, der intensiv mit Komplexen Zahlen hantierte, ist der Italiener Gerolamo Cardano zu nennen. Er stieß auf Komplexe Zahlen bei dem Versuch eine kubische Gleichung aufzulösen. Rafael Bombelli (1526 - 1572) baute Cardanos Thesen aus und der Kampf um die Anerkennung der Komplexen Zahlen begann. Die folgenden Mathematiker sollten nicht in Vergessenheit geraten, wenn wir über Komplexe Zahlen sprechen:

- Niccolo Tartaglia (1499 - 1560, Italien)
- Gerolamo Cardano (1501 - 1576, Italien)

- Rafael Bombelli (1526 - 1572, Italien)
- François Viète (latinisiert: Vieta; 1540–1603)
- John Wallis (1616 - 1703, England)
- Abraham de Moivre (1667 - 1754, England)
- Leonard Euler (1707 - 1783, Schweiz-Russland)
- Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855, Deutschland)

Leonard Euler meinte zu den Komplexen Zahlen [4]

> ”So ist klar, dass die Quadratwurzel von Negativ-Zahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden; folglich müssen wir sagen, dass dieselben ohnmöglichen Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach ohnmöglich sind, und gemeiniglich imaginäre Zahlen, oder eingebildete Zahlen genennt werden, weil sie bloß allein in der Einbildung statt finden”

Der Rationalist René Decartes merkte an [4]

> ”Endlich bemerken wir, dass sowohl die positiven wie auch negativen Wurzeln einer Gleichung nicht immer reell, sondern manchmal nur imaginär sind, daher man kann sich zwar alle Male bei jeder beliebigen Gleichung so viele Wurzeln, wie ich angegeben habe, vorstellen, aber manchmal gibt es keine Größen, die den so vorgestellten entsprechen.”

Kapitel 2

Grundarithmetik

2.1 Addition

$$(1+3i)+(2+6i)=3+9i$$
$$(1+3i)+(2+6i)=1+(3i+2)+6i=(1+2)+(3i+6i)$$
$$(1+2i)+(4+3i)=(1+4)+(2+3)i=5+5i$$

Wie an Beispiel 2 erkennbar ist, gelten die normalen Kommutativ- und Assoziativgesetze. Die Argumente der Operationen können beliebig getauscht werden und Klammern definieren Vorrangsregeln. Vorzeichen vor Klammern werden wie gewohnt aufgelöst. Wir versuchen immer i möglichst weit herauszuheben (damit wir eine Komplexe Zahl als Ergebnis erhalten).

2.2 Subtraktion

Analog zur Addition:

$$(1+3i)-(2+6i)=-1-3i$$
$$(1+3i)-(2+6i)=(1+3i)+(-2-6i)$$

Für jede arithmetische Rechenoperation gilt: die Summe (oder Differenz oder Produkt oder Quotient) zweier Komplexer Zahlen ist wiederum eine Komplexe Zahl.

$$(2+4i)-(1+4i)=1+0\cdot i$$

2.3 Multiplikation

Bei der Multiplikation tritt zum ersten Mal der Fall $i \cdot i$ auf. In jedem Fall sollen wir i^2 in -1 auflösen und den Term danach vereinfachen.

$$2(1+3i) = 2+6i$$
$$(2+3i)(4-5i) = 8+12i-10i-15i^2 = 23+2i$$

2.4 Division

Analog zur Multiplikation, wird die Operation komponentenweise durchgeführt:

$$\frac{2+6i}{2} = 1+3i$$

Wir können den Quotienten von zwei Komplexen Zahlen erweitern, damit wir i herausheben können.

$$\frac{1+2i}{4+3i} = \frac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{(1\cdot 4+2\cdot 3)}{(4^2+3^2)} + \frac{(2\cdot 4-1\cdot 3)}{(4^2+3^2)}\cdot i = \frac{10}{25}+\frac{5}{25}\cdot i = \frac{2+i}{5}$$

2.5 Periodisches Verhalten der Potenz der imaginären Einheit

Wir betrachten i^n (mit $n \in \mathbb{Z}$).

$$i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1 \qquad i^5 = i \qquad i^6 = -1$$

Wir erkennen ein periodisches Verhalten. i^1, i^5, i^9 (usw.) können alle in den selben Term aufgelöst werden. Löst der Exponent die Gleichung $x{\cdot}4+1$ ganzzahlig, so ist das Ergebnis i. Nach dem selben Schema mit der Gleichung $x{\cdot}4+2$ ist das Ergebnis -1. Für $x{\cdot}4+3$ ist das Ergebnis $-i$ und für $x{\cdot}4+4$ ist es 1.

2.6 Binomische Formeln

Bei der Quadrierung einer Komplexen Zahl ergibt sich ein Phänomen, welches uns von den reellen Zahlen nicht bekannt ist: Der letzte Ausdruck (b^2) wird vom restlichen Ausdruck abgezogen.

$$(a+bi)^2 = a^2+2abi-b^2$$

$$(a-bi)^2 = a^2 - 2abi - b^2$$
$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$
$$(a+bi)^3 = a \cdot (a^2 - 3b^2) + b \cdot (3a^2 - b^2)i$$
$$(a-bi)^3 = a \cdot (a^2 - 3b^2) + b \cdot (b^2 - 3a^2)i$$

$\rightarrow$ merke dir dies fürs Kapitel Konjugation

Kapitel 3

Interpretation in Polarkoordinaten

3.1 Kartesisch

Reele Zahlen haben die wunderbare Eigenschaft, dass man sie auf einem Zahlenstrahl sehr schön visualisieren kann. Komplexe Zahlen haben hier eine Problem. Wir haben nämlich zwei Komponenten und zwei an der Zahl lassen sich nicht auf einem Strahl eintragen. Wir müssen eine Ebene betrachten. Wir können die Komplexe Zahl $a + b \cdot i$ in ein Zahlenpaar $\langle a \,|\, b \rangle$ überführen, welches wir in eine Ebene eintragen.

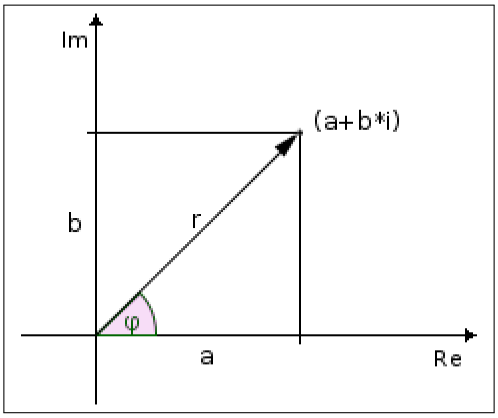

Abbildung 3.1: Komplexe Zahlenebene

Wir tragen auf der vertikalen Achse die imaginären Zahlen ein und auf der Horizontalen die reellen Zahlen. Diese Darstellung wurde von Carl Friedrich von Gauß verbreitet und wird deshalb auch Gaußebene ("Gaußsche Zahlenebene") genannt. Der Abstand eines Punktes vom Nullpunkt (= Betrag der Komplexen Zahl) lässt sich durch den Satz des Pythagoras herleiten.

$$|\underline{z}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Wir können auch kurz die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Zahlenpaaren (wie wir sie von den Vektoren kennen) betrachten. Wenn wir die Zahlentupeln wieder in Komplexe Zahlen überführen, erhalten wir die Rechenregeln, die wir oben besprochen haben.

$$\begin{aligned}
\langle a \,|\, b \rangle + \langle c \,|\, d \rangle &= \langle a + c \,|\, b + d \rangle \\
\langle a \,|\, b \rangle - \langle c \,|\, d \rangle &= \langle a - c \,|\, b - d \rangle \\
\langle a \,|\, b \rangle * \langle c \,|\, d \rangle &= \langle ac - bd \,|\, bc + ad \rangle \\
\frac{\langle a \,|\, b \rangle}{\langle c \,|\, d \rangle} &= \langle \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \,|\, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \rangle
\end{aligned}$$

3.2 Polarform

Doch statt dieser Projektion des Zahlenpaars $\langle a \,|\, b \rangle$ können wir die Komplexe Zahl mithilfe der Parameter φ und r als Polarkoordinate darstellen. Wir bezeichnen φ als das Argument (auch Winkel oder Phase) der Komplexen Zahl $\underline{z}$ ($\varphi = arg(\underline{z})$) und r als Betrag (auch Modul) der Komplexen Zahl $\underline{z}$ ($r = |\underline{z}|$). Anstelle die Werte auf den Achsen einzutragen, geben wir Richtung (φ) und Länge (r) an. Diese Darstellung nennt man Polarform.

In der Polarform ist eine Komplexe Zahl wie folgt definiert:

$$\underline{z} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Wir können drei verschiedene Darstellungen bei der Polarform unterscheiden.

$$r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} = r\angle\varphi$$

Die Darstellung auf der linken Seite nennt man trigonometrische Form und in der Mitte befindet sich die Exponentialform. Auf der rechten Seite sprechen wir von der Versorform. Im Prinzip handelt es sich nur um andere Schreibweisen und eigentlich gibt es nur zwei Formen (Binomialform und Polarform). Beachte, dass durch diese Definition gilt (siehe Eulersche Identität):

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Die Formel für die trigonometrische Form lässt sich über die Definition von Sinus und Cosinus herleiten.

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} \qquad\qquad \cos\varphi = \frac{a}{r}$$

$$b = \sin\varphi \cdot r \qquad\qquad a = \cos\varphi \cdot r$$

$$a + b \cdot i = \cos\varphi \cdot r + (\sin\varphi \cdot r) \cdot i$$

$$a + b \cdot i = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Der Winkel φ selbst ist definiert durch den Arkustangens von b durch a.

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a}$$

Beachte aber von wo der Winkel gemessen wird. Es wird der selbe Winkel gemessen, wenn wir eine Komplexe Zahl nehmen und auch deren Gegenteil (also $\underline{z} \cdot (-1)$ gerechnet). In dem Fall muss der Winkel plus 180° gerechnet werden. Ebenso darf keine Division durch 0 passieren ($a \neq 0$). Wikipedia[5] definiert deshalb 6 verschiedene Fälle:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{für } a > 0, b \text{ beliebig} \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{für } a = 0, b < 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } a = 0, b = 0 \end{cases}$$

Im Folgenden werde ich mich auf die Polarform konzentrieren. Es sollte möglich sein komplexere Rechnungen auch in Binomialform lösen zu können, aber dies gestaltet sich unvergleichbar schwierig. Wir haben die Werkzeuge kennen gelernt, um zwischen den Darstellungen wechseln zu können. Wenn in einem Kapitel die Binomialform fehlt, hat dies also ein Begründung (das ist auch der Grund wieso ich die Binomialarithmetik aus Kapitel 2 nicht mit der Polararithmetik aus Kapitel 3.4 zusammengelegt habe).

3.3 Konjugation

$$(a + b \cdot i)^* = a - b \cdot i$$

Zu jeder Komplexen Zahlen gibt es eine konjugiert komplexe Größe. Es sei $\underline{z}$ eine Komplexe Zahl. Wir invertieren das Vorzeichen im Imaginärteil, um die konjugiert Komplexe zu erhalten. Wir kennzeichnen die Konjugation durch einen Stern (oder durch eine Überlinie). Auf der Gaußschen Ebene bedeutet diese eine Spiegelung entlang der Realachse (Abbildung 3.2).

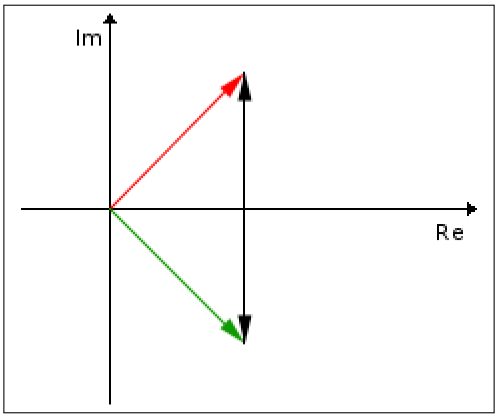

Abbildung 3.2: Konjugation einer Komplexen Zahl

Des Weiteren lassen sich zwei weitere Folgerungen für konjugiert Komplexe Zahlen aufstellen:

$$\textbf{Annahme:}\quad (z+y)^* = z^* + y^*$$
$$((2+3\cdot i)+(3+2\cdot i))^* = (2-3\cdot i)+(3-2\cdot i)$$
$$(5+5\cdot i)^* = 5-5\cdot i$$

wahre Aussage

$$\textbf{Annahme:}\quad (z\cdot y)^* = z^*\cdot y^*$$
$$((1+4\cdot i)\cdot(5-2\cdot i))^* = (1-4\cdot i)\cdot(5+2\cdot i)$$
$$(5+20\cdot i-2\cdot i-8\cdot i^2)^* = 5-20\cdot i+2\cdot i-8\cdot i^2$$
$$(13+18\cdot i)^* = 13-18\cdot i$$

wahre Aussage

Die Summe einer Komplexen Zahl mit ihrer Konjugation ergibt das Doppelte ihres Realteils:

$$z+z^* = (a+b\cdot i)+(a-b\cdot i) = 2a$$

Die Differenz einer Komplexen Zahl mit ihrer Konjugation ergibt das Doppelte ihres Imaginärteils:

$$z-z^* = (a+b\cdot i)-(a-b\cdot i) = 2b$$

Das Produkt einer Komplexen Zahl mit ihrer Konjugation ergibt ihren Betrag zum Quadrat:

$$z\cdot z^* = (a+b\cdot i)(a-b\cdot i) = a^2+b^2 = |z|^2$$

Die Konjugation können wir auch in der Polarform betrachten. In der trigonometrischen Form müssen wir nur das Vorzeichen des Arguments umdrehen:

$$z^* = r \cdot (\cos -\varphi + i \cdot \sin -\varphi)$$

Und in der Exponentialform:

$$z^* = re^{-i\varphi}$$

3.4 Die Arithmetik in Polarform

In diesem Unterkapitel möchte ich nur kurz anschneiden, welche Vorteile die Rechenoperationen in der Polarform bieten. Deshalb sind nur ein paar Operationen vertreten.

3.4.1 Addition und Subtraktion

Bei der Addition lässt sich die Polarform nicht irgendwie vereinfachen. Wir schauen uns dafür die Auswirkungen auf der Zahlenebene an.

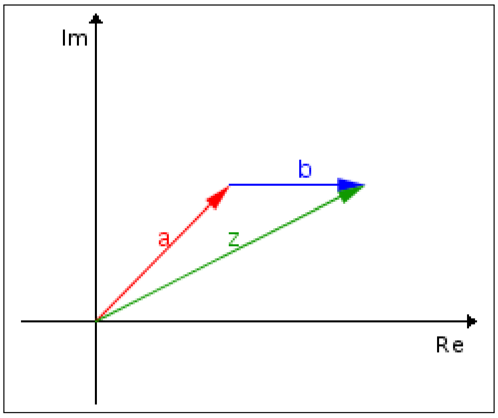

Abbildung 3.3: Addition zweier Komplexer Zahlen

Wir setzen ganz gewöhnlich den Winkel an und bewegen uns r Einheiten weit. Danach setzen wir an dem neuen Punkt an und bewegen uns wieder mit Winkel und Länge. Der entstehende Weg ist die Direktverbindung vom Nullpunkt zu letzterstellten. Das selbe gilt für Subtraktion; nur dass der zweite Term invertiert wird. Dieses Vorgehen ist analog zur Vektorrechnung.

3.4.2 Multiplikation

Die Multiplikation lässt sich wunderbar vereinfachen.

$$\underline{z_1} \cdot \underline{z_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Wir können daraus ablesen, dass wir zur Multiplikation die Beträge multiplizieren müssen und die Argumente addieren. Dies können wir auch beobachten, wenn wir in der trigonometrischen Form bleiben:

$$\underline{z_1} \cdot \underline{z_2} = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) = r_1 r_2 \cdot [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

3.4.3 Division

Die Multiplikation verhält sich analog zur Multiplikation. Die Argumente werden aber subtrahiert.

$$\frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = r_1 {r_2}^{-1} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$\frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)} = r_1 {r_2}^{-1} \cdot [\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

3.4.4 Potenzen

Siehe Abschnitt 4.4 ”Satz von De Moivre”.

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

3.4.5 Wurzel ziehen

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} = -1 \Rightarrow 1 = -1$$

Es ist also Vorsicht beim Wurzel ziehen geboten (dies ist übrigens immer beim Lösen von Gleichungen mit Komplexen Lösungen zu berücksichtigen). Am besten funktioniert es über die Eulersche Identität.

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

Die Variable k nimmt natürliche Werte zwischen 0 und $n-1$ an. Es gibt also k verschiedene Wurzeln.

3.4.6 Differentation und Integration

Zum Integrieren wie auch Differenzieren wird die Polarform genutzt. Es gelten die ganz normalen Rechenregeln. Für die Winkelfunktionen gilt wie gewohnt:

$$f(x) = \sin x \qquad g(x) = \cos x$$

$$f'(x) = \cos x \qquad g'(x) = -\sin x$$

Kapitel 4

Weitere Rechnungswege

4.1 Eulersche Form

Euler definiert eine Formel ("Eulersche Identität"), die Komplexe Zahlen mit der Trigonometrie verbindet. Wir haben bereits entdeckt, dass sie sich aus der Umrechnung von der trigonometrischen Form zur Exponentialform ergibt.

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

Wir verwenden "$cis\, x$" als Kurzform für "$\cos x + i \cdot \sin x$"

Da $\cos 180° = -1$ und $\sin 180° = 0$ gilt, können wir für den Winkel $180°$ (äquivalent zur Zahl π_{rad}) definieren:

$$e^{i \cdot \pi} = -1$$

4.2 $i \cdot i$

Die Rechnung $i \cdot i$ kann man sehr gut auf der Gaußschen Zahlenebene beobachten und das Ergebnis bestätigt die korrekte Interpretation durch die Ebene (Abbildung 4.1). i steht für $0 + 1 \cdot i$ in der Binomialform. r beträgt 1 und φ beträgt $90°$. Wie wir wissen, müssen wir bei der Multiplikation die Beträge multiplizieren und die Argument addieren. $1 \cdot 1 = 1$ und $90° + 90° = 180°$. Wenn wir diese Daten auf die Ebene übertragen, erhalten wir genau die Komplexe Zahl $-1 + 0 \cdot i$. Daraus bestätigt sich:

$$i^2 = -1$$

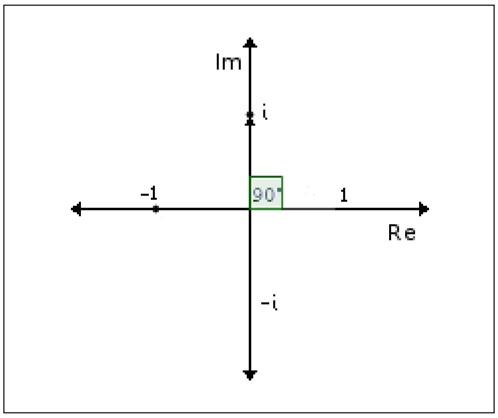

Abbildung 4.1: Die Gaußsche Zahlenebene bestätigt $i{\cdot}i = -1$

4.3 Logarithmen

Der komplexe Logarithmus hat das Problem nicht eindeutig zu sein. Wir haben gesagt, dass bei $\varphi = 180° = \pi_{rad}$ gilt:

$$e^{i\pi} = -1$$

Wir möchten nun nachweisen, dass gilt:

$$e^{i\pi 2k} = 1; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zuerst legen wir eine Gleichung an und formen sie um ...

$$e^{i\pi^{2k}} = 1$$
$$(\cos 180 + i \cdot \sin 180)^{2k} = 1$$
$$(\cos 180 \cdot 2k + i \cdot \sin 180 \cdot 2k) = 1$$
$$(1 + i \cdot 0) = 1$$
$$\text{wahre Aussage}$$

In Zeile 2 wurde die uns (von Seite 18) bekannte Potenzrechenregel angewandt. In Zeile 3 benutzen wir den Satz von Moivre. Für Zeile 4 müssen wir wissen, dass das Produkt von Sinus bzw. Cosinus 360° mit $k \in \mathbb{R}$ immer 0 bzw. 1 eribgt.

Es sei nun w ein Logarithmus von s. Wir können eine Zahl v bilden:

$$v = w + 2k\pi i; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Wieder können wir für k eine ganze Zahl einsetzen und damit beliebig viele Zahlen bilden. Für jede Zahl v dieser Form gilt ebenso, dass sie ein Logarithmus von s ist, da gilt:

$$e^v = e^{w+2k\pi i} = e^w \cdot e^{2k\pi i} = e^w \cdot 1 = e^w$$

Wir haben somit gezeigt, dass der Komplexe Logarithmus mehrdeutig ist.

Als Konsequenz müssen wir einen bestimmten Bereich (”Streifen”) definieren in dem wir arbeiten. Als Beispiel:

$$\{w \in \mathbb{C} : -\pi < Im(z) \leq \pi\}$$

Jene Komplexe Zahl w nennt man dann Hauptwert des Logarithmus.

Den Logarithmus in Binomialform zu berechnen, ist ungewöhnlich und es gibt deshalb keine bekannten Formeln dafür.

4.4 Satz von Moivre

Abraham de Moivre (1667–1754) stellte eine Formel auf, um das Potenzieren einer Komplexen Zahl in der Polarform zu ermöglichen.

$$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$$

Die Formel leitet sich aus der trigonometrischen Form und einem Potenzrechengesetz ab:

$$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$$

$$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$$

$$(e^{i\varphi})^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$$

$$e^{i\varphi n} = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$$

$$\cos\varphi n + i \cdot \sin\varphi n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi$$

wahre Aussage

4.5 Gleichungen lösen

Um 820 n.Chr. stand Gerolamo Cardano (1501–1576) vor einem Problem:

> Finden sie zwei Zahlen deren Produkt 40 und deren Summe 10 ist.

$$40 = a \cdot b$$

$$10 = a + b$$

$$\Rightarrow a = 10 - b$$

$$40 = (10 - b) \cdot b$$

$$0 = b^2 - 10b + 40$$

Wir verwenden die kleine Formel[1], um diese Gleichung zu lösen:

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{(\frac{-10}{2})^2 - 40}$$
$$x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Wenn wir aus einer negativen Zahl die Wurzel bilden könnten ($\sqrt{15}i$), fänden wir zwei Lösungen für diese Gleichung. D sei die Diskriminante[2] der quadratischen Gleichung. Wir können jetzt alle Fälle für D betrachten:

D > 0: Zwei reelle Lösungen

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} \quad \vee \quad x = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$$

D = 0: Eine reelle Lösung

$$x = -\frac{p}{2}$$

D < 0: Zwei komplexe Lösungen

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{-D}i \quad \vee \quad x = -\frac{p}{2} + \sqrt{-D}i$$

Als man die ersten Problemaufstellungen mithilfe der Komplexen Zahlen lösen konnte, blieb das Erstaunen trotzdem aus. Auch wenn man weiterhin an der Existenz von Komplexen Zahlen zweifelte, so war zumindest klar, dass sie ein gutes Werkzeug sind, um ein paar Gleichungen n-ten Grades zu lösen. Cardano hat übrigens eine Reihe von Formeln aufgestellt. Ein Teil davon enthält Komplexe Zahlen als Zwischenergebnisse und letztendlich ergeben sich wieder reelle Lösungen für die Gleichung.

4.6 Satz von Vieta

François Viète (latinisiert: Vieta) befürwortete die Einführung von Buchstaben als Variablen in mathematischen Anwendungen (wie wir sie heute benutzen). Des Weiteren entdeckte er eine Gesetzesmäßigkeit in quadratischen Gleichungen. Er nutzte dieses Faktum um quadratische Gleichungen schneller als mit der Kleinen Formel zu lösen.

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

[1] $0 = x^2 + px + q \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

[2] Term unter der Wurzel in der Kleinen (bzw. Großen) Formel

Wir können nun versuchen diese Gleichung als Produkt darzustellen.

$$x^2 - 1x + 7x - 7 = 0$$
$$(x+7)(x-1) = 0$$

Und wann ist ein Produkt gleich Null? Wenn einer seiner Faktor gleich Null ist. Deshalb erhalten wir die Lösungen $x_1 = -7$ und $x_2 = 1$. Diese Idee lässt sich bei jeder quadratischen Gleichung anwenden (wie die Große/Kleine Formel), aber vor allem schlußfolgerte Vieta daraus das Verhältnis der Variablen zueinander:

$$x^2 + px + q = 0$$
$$p = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2)$$
$$q = x_1 \cdot x_2$$

Und wenn wir es auf das obige Beispiel anwenden, können wir Vietas Aussagen bestätigen:

$$p = 6 = 7 - 1$$
$$q = -7 = (-7) \cdot (1)$$

Wir können also quadratische Gleichungen in dieser Form anschreiben:

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$
$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$$

Vieta schuf damit einen direkten Übergang zu Cardanos Problem. Wir können verallgemeinern, dass zu jeder Aufgabe der Form ($x_1 \cdot x_2 = a$ und $x_1 + x_2 = b$) ein äquivalentes Gleichungssystem (also mit gleichen Lösungen) der Form $x^2 - bx + a = 0$ existiert.

Finden sie zwei Zahlen deren Produkt -7 und deren Summe -6 beträgt.

$$x_1 \cdot x_2 = -7$$
$$x_2 + x_2 = -6$$
$$\Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0$$

Hat man die Lösung für das Gleichungssystem, hat man die Lösung für unser Produkt-Summen-Problem.

Kapitel 5

Anwendung

5.1 Physik und Elektrotechnik

Elektrotechnik: Wir verwenden das Formelzeichen j für die imaginäre Einheit
In der Elektrotechnik (Komplexe Wechselstromrechnung) werden Komplexe Zahlen und vor allem die Gaußsche Zahlenebene zur Beschreibung von Wechselgrößen und Zeigern in Sinusschwingungen verwendet.

5.1.1 Zeigerdiagramme

Wir nehmen an, dass sich eine Wechselspannung sinusförmig verhält. Diese Wechselspannung legen wir an einen ohmschen Widerstand[1]. Der Strom – der durch den Widerstand fließt – ist jetzt abhängig von dem Widerstand und der angelegten Spannung. Der Strom erreicht nun gleichzeitig mit der Spannung den Nullpunkt. Man spricht beim ohmschen Widerstand davon, dass Spannung und Strom in Phase liegen bzw. die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung Null beträgt.

Wir möchten nun den zeitlichen Verlauf von Spannung und Strom aufzeichnen. Dazu verwenden wir ein sogenanntes Zeigerdiagramm. Ganz allgemein betrachtet hat ein Zeigerdiagramm den selben Aufbau wie die Gaußsche Zahlenebene und wir nutzen sie um Zeiger darzustellen. Wir lassen einen Zeiger mit der Länge der Spannungsamplitude $\widehat{U}$ (bzw. ihrem Effektivwert) mit ω (Winkelgeschwindigkeit) rotieren. Wir können die momentane Spannung an der Vertikalachse des Zeigerdiagramms ablesen.

Wir haben jetzt nur eine Spannung betrachtet. Aber es lassen sich ebenso zwei Spannungen betrachten und auf das $\widehat{u}t$-Diagramm übertragen. Die Darstellung auf dem Zeigerdiagramm bietet den großen Vorteil, dass eine Addition von zwei

[1] Widerstand, der nicht von Spannung, Stromstärke und Frequenz beeinflußt wird

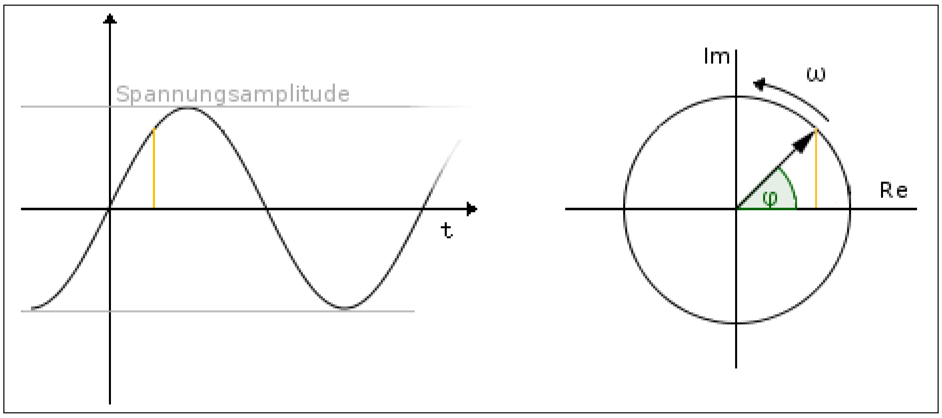

Abbildung 5.1: Sinusschwingung auf einem Zeigerdiagramm (rechts)

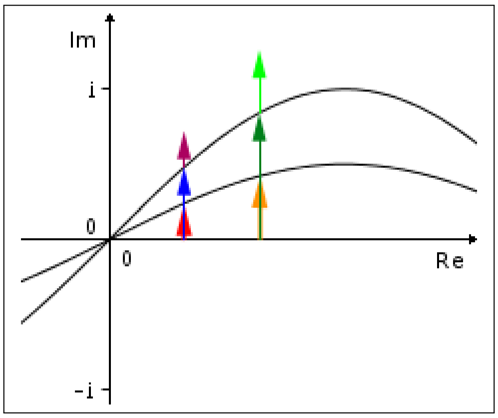

Abbildung 5.2: Zeiger-Addition

Sinusschwingungen die phasenverschoben sind – aber die gleiche Frequenz besitzen – leicht durchzuführen ist. Wir müssen nur alle Momentanzustände der Spannungen betrachten und vektoriell addieren.

5.1.2 Transformation

Die Ermittlung der Summenspannung im Zeigerdiagramm lässt sich schneller durchführen als die Addition der Sinuskurven zu jedem Zeitpunkt. Ein Beispiel wäre es zwei Spannungen zu addieren, die sich sinusförmig verhalten und die Zeit als Variable haben. Wir betrachten gleich die Multiplikation:

$$u_1(t) = \widehat{u}_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi u_1)$$
$$u_2(t) = \widehat{u}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi u_2)$$
$$u_1(t) \cdot u_2(t) = \quad ?$$

Es gilt übrigens ($\widehat{u} = \sqrt{2} \cdot u$). Wir können diese Gleichungen nun transformieren.

$$\underline{u}_1 = u_1 \cdot e^{j\varphi u_1}$$
$$\underline{u}_2 = u_2 \cdot e^{j\varphi u_2}$$

Wir bemerken bei dieser Transformation eine Reihe von Veränderungen. Die $\sqrt{2}$ lassen wir verschwinden, weil nur der Effektivwert wichtig ist und wir die Zahl erst bei der Rücktransformation wieder einsetzen. Ebenso unwichtig ist (ωt), da wir bereits erwähnt haben, dass es sich um zwei Spannungen mit gleicher Frequenz handelt (bedenke das Gesetz $\omega = 2\pi f$). Alle Zeiger rotieren mit der selben Geschwindigkeit und wir betrachten nur Momentanspannungen. Die Zeiger liegen immer im selben Winkel auseinander, deshalb fällt diese Variable weg.

Ist uns die Transformation geglückt, können wir die beiden Spannungen – wie wir es in der trigonometrischen Form gewohnt sind – multiplizieren.

$$\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = u_1 u_2 \cdot e^{j(\varphi u_1 + \varphi u_2)}$$

Wir können diesen Term nun wieder rücktransformieren (denke an $\sqrt{2}$, ωt, etc). Damit erhalten wir eine wunderschöne Gleichung mit der wir ganz leicht die Gesamtspannung zu jedem Zeitpunkt t ausdrücken können.

$$u_{ges}(t) = u_1(t) \cdot u_2(t) = \sqrt{2} \cdot u_1 u_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi u_1 + \varphi u_2)$$

Wir haben also die Rechengesetze der Komplexen Rechnung genutzt, um uns das Ausrechnen der Gesamtspannung zu einem beliebigen Zeitpunkt zu erleichtern. Die andere Variante wäre es, die (schwierig zu merkenden) Additiontheorems zu verwenden. Ebenso finden wir Anwendungsbeispiele in der Laplace-Transformation. Jene würden jedoch den Umfang dieses Dokuments sprengen.

Kapitel 6

Appendix

.1 Glossar

imaginäre Einheit: i definiert durch $i = \sqrt{-1}$

imaginäre Zahl: Zahl der Struktur $b \cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}$

Komplexe Zahl: Zahl der Struktur $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

Polarform: Definition einer Komplexen Zahl über den Winkel φ und die Länge r

$$r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Gaußsche Zahlenebene: Ebene mit 2 Achsen, auf denen der Realtteil (horizontal) und Imaginärteil (vertikal) aufgetragen werden

Konjugation: Komplexe Zahl mit invertiertem Imaginärteil: $(a + bi)^* = a - bi$

$cis\, x$: Eine Kurzform für "$\cos x + i \cdot \sin x$"

Eulersche Identität: Bindeglied zwischen Komplexe Zahlen und Trigonometrie (entdeckt von Euler)

Satz von Moivre: Satz, der das Potenzieren von Komplexen Zahlen erleichtert

Satz von Vieta: Beschreibt den Zusammenhang von p und q mit den Lösungen einer quadratischen Gleichung

.2 Zusammenfassung: Darstellungen

$$\begin{cases} \text{Binomialform} \quad (a+bi) \\ \text{Polarform} \quad (r,\varphi) \begin{cases} \text{Trignometrische Form} \quad (r\cdot[\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi]) \\ \text{Exponentialform} \quad (r\cdot e^{i\varphi}) \\ \text{Versorform} \quad (r\angle\varphi) \end{cases} \end{cases}$$

Zur Umrechnung benötigen wir die Formeln:

$$a + bi = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$

$$a = r\cdot\cos\varphi \qquad b = r\cdot\sin\varphi \qquad \varphi = \arctan\frac{b}{a} \text{ für a>0}$$

.3 Fragen

- Geschichte der Komplexen Zahlen und Definition
- Wieso wurden die Komplexen Zahlen anerkannt?
- Gelten alle Rechenregeln der reelen Zahlen auch im Komplexen Zahlenbereich?
- Gibt es inverse und neutrale Elemente?
- Erkläre die verschiedenen Darstellungsweisen (Vor- und Nachteile) und gehe auf die imaginäre Einheit näher ein
- Erkläre den Zusammenhang zwischen der Polardarstellung von Komplexen Zahlen und der kartesischen Binomialform.
- Deute die Multiplikation einer Komplexen Zahl mit einer reellen, einer imaginären, einer Komplexen Zahl geometrisch. Leite daraus die Regel von Moivre her.
- Was versteht man unter der Eulerschen Identität (mit Begründung)?
- Welche Auswirkung hat die imaginäre Einheit auf die binomischen Formeln?
- Erkläre die Polarform von Komplexen Zahlen
- Welche Rechenoperationen sind im Bereich der Komplexen Zahlen definiert?
- Anwendung von Komplexen Zahlen

.4 Attachments

http://lukas-prokop.at/proj/spezialgebiete/komplexe_zahlen.pdf
http://lukas-prokop.at/proj/spezialgebiete/komplexe_zahlen.tar.gz

.5 Autor

Ich bin Maturant am BRG Viktring und entschied mich für das Thema Komplexe Zahlen, um ein weiteres mysteriöses Kapitel der Mathematik näher zu erforschen. Ich habe dieses Dokument verfasst, um das Thema Komplexe Zahlen für meine mündliche Mathematik-Matura am BRG Viktring vorzubereiten. Ich stelle dieses Dokument gerne allen Personen zur Verfügung, die das Dokument zur Wissenerweiterung nutzen wollen und deshalb ist es öffentlich im WWW verfügbar.

11. April 2009

.6 Copyright

.7 Dank

Mein Dank gilt Prof. Egger (Mathematik) vom BRG Viktring, die mir diese Spezialgebiet gestattet hat, mir Übungen gab und das Dokument korrektur-gelesen hat. Des Weiteren möchte ich Markus Hohenwarter von GeoGebra danken. Mit seiner Software habe ich teilweise Screenshots von den Graphiken erzeugt. Sehr empfehlenswertes Werkzeug für Kurvendiskussionen! Genauso ein Dank an meinen Bruder, der mir in Sachen Elektrotechnik aushalf. Ein großer Dank geht an Tim Berners-Lee, welcher das WorldWideWeb entwickelt hat und damit Wissen allgemein zugänglich machte.

Literaturverzeichnis

[1] Loviscach, Joern: Komplexe Zahlen – Serien von Fachhochschulvorlesungen.
http://youtube.com/user/JoernLoviscach.

[2] Malle, Ramharter, Ulovec und Kandl: Mathematik verstehen 7. OEBV, 2006.

[3] Malle, Ramharter, Ulovec und Kandl: Mathematik verstehen 8. OEBV, 2007.

[4] Müller, Sabrina: Geschichte der Zahlen.
http://tinyurl.com/m2uqlf.

[5] Wikipedia: Komplexe Zahlen. http://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Zahl
siehe auch: Cardanische Formeln, Komplexe Wechselstromrechnung, Konjugation (Mathematik), Eulersche Identität, Logarithmus.