Esperanta klubvespero

“La bazo de matematiko”

prezentisto: Luko

ĵaudo la 2024-04-04

https://lukas-prokop.at/talks/klubvesperoj/

Kiu mi estas?

Esperanta nomo: Luko

1) ĉefe mi estas programisto
2) en mia libertempo
   - mi praktikas kaj instruas Aikidō
   - mi lernas Esperanton kaj la japanan
   - mi stud(i/a)s informatikon kaj matematikon
   - mi verkas programon por cifereca kompostado

Tagordo

- Vortprovizo
- Logiko
- ZFC aksiomoj

Vortprovizo

- 1, 2, 6, 4
- 152, 186, 2, 1024
- “Esperanto estas bona”,
  “Pingvenoj ne loĝas ĉe norda poluso”
- { }, {1}, {2, 6, 4}
- ∞
- + − × ÷

Vortprovizo

• 1, 2, 6, 4	cifero
• 152, 186, 2, 1024	nombro
• “Esperanto estas bona”, “Pingvenoj ne loĝas ĉe norda poluso”	propozicio
• { }, {1}, {2, 6, 4}	aro
• ∞	senfineco
• + − × ÷	adicio, subtraho, multipliko, divizo

Logiko

Komence ...

Logiko

Komence nur estis la aro.

Logiko

Komence nur estis la aro.

$A := \{\}$

Logiko

Komence nur estis la aro.

$A := \emptyset$

Logiko

Komence nur estis la aro.

$A := \emptyset$

La kardinaleco de A estas 0.

Logiko

Komence nur estis la aro.

$A := \{42\}$

La kardinaleco de A estas 1.

Logiko

Komence nur estis la aro.

$A := \{42, 67\}$

La kardinaleco de A estas 2.

Logiko

Komence nur estis la aro.

$A := \{42, 67\}$

La kardinaleco de A estas 2.

42 estas elemento de A.

Logiko

Matematika demando:

“La aro havas du elementojn, nome Ewald kaj Heinz-Paul. Philipp aliĝos al la aro. Ĉu la grupo havas tri elementojn?”

Logiko

Matematika demando:

"La aro havas du elementojn, nome Ewald kaj Heinz-Paul. Philipp aliĝos al la aro. Ĉu la grupo havas tri elementojn?"

Jes.

Logiko

Baza leĝo de nia logiko:

- La propozicio egalas la propozicion
- Ĉiu objekto egalas sin mem
- Leĝo de “identeco”

Logiko

Baza leĝo de nia logiko:

- Ĉiu propozicio pravas aŭ malpravas
- Leĝo de "neekzistanta trio"

Logiko

Baza leĝo de nia logiko:

- Ĉiu propozicio pravas aŭ malpravas
  kaj ne ambaŭ simultane.
- Leĝo de “senkontraŭdiro”
- La propozicio malpravas. Do la malo pravas.
- Ekde Aristotelo

Logiko

A := “Esperanto estas bona por la mondo”

B := “La aro havas tri elementojn”

A	*B*	*A kaj B*
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

A	*B*	*A aŭ B*
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

A	*B*	*A aŭ B ekskluzive*
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Logiko

"Viroj estas homoj. Sokrates estas viro."

$\Longrightarrow$?

Logiko

“Viroj estas homoj. Sokrates estas viro.”

$\Longrightarrow$ “Sokrates estas homo”

Baza leĝo de nia logiko:

- “Modus ponens”
- “B implicas A. Se A, do B.”

Logiko

"Viroj estas homoj. Virinoj estas homoj.
Ewald, Heinz-Paul, kaj Marta estas elementoj de la aro."

A := {Ewald, Heinz-Paul, Marta}

$\Longrightarrow$ Ĉiu elemento estas homo.
$\Longrightarrow$ Simbole: $\forall\, e \in A$: "e estas homo"

$\Longrightarrow$ Almenaŭ unu elemento estas virino.
$\Longrightarrow$ Simbole: $\exists\, e \in A$: "e estas virino"   aŭ $\exists!$

Logiko

"Viroj estas homoj. Virinoj estas homoj.
Ewald, Heinz-Paul, kaj Marta estas elementoj de la aro."

A := {Ewald, Heinz-Paul, Marta}
H(e) := "e estas homo"
V(e) := "e estas virino"

$\Longrightarrow$ Ĉiu elemento estas homo.
$\Longrightarrow$ Simbole: $\forall\, e \in A: H(e)$

$\Longrightarrow$ Almenaŭ unu elemento estas virino.
$\Longrightarrow$ Simbole: $\exists\, e \in A: V(e)$ aŭ $\exists!$

Logiko

La logiko de la unua ordo enhavas:

- Aro estas objekto, kardinaleco, $\in$, $\notin$
- Leĝo de identeco
- Leĝo de neekzistanta trio
- Leĝo de senkontraŭdiro
- Leĝo de "modus ponens"
- Kajo, aŭo, $\top$, $\bot$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $P(x)$

Logiko

“Viroj estas homoj.	Sokrates estas viro.”
aksiomo	aksiomo

Nun, ni havas bazan ideon per kiuj principoj kaj simboloj ni povas konkludi. Sed kion ni postulas por konstrui matematikon?

Unue unu paradokson ...

Paradokso de Bertrand Russell

R := { e | e ∉ e }

Ĉu *R* estas elemento de *R*?

Paradokso de Bertrand Russell

$R := \{ e \mid e \notin e \}$

Ĉu R estas elemento de R?

- Se jesas, $R \in R$ kaj R plenumas $R \notin R$ kontraŭdire.
- Se neas, $R \notin R$ kaj R plenumas la kriterion de la aro. Do $R \in R$ kontraŭdire.

Paradokso de Bertrand Russell

Sama principo: “Tiu frazo malpravas”

- Se jesas, la tuta frazo pravas sed la senso kontraŭdiras.
- Se neas, la negacio de la frazo validas. Do “tiu frazo ne malpravas” aŭ “tiu frazo pravas” validas kiu kontraŭas la originan frazon.

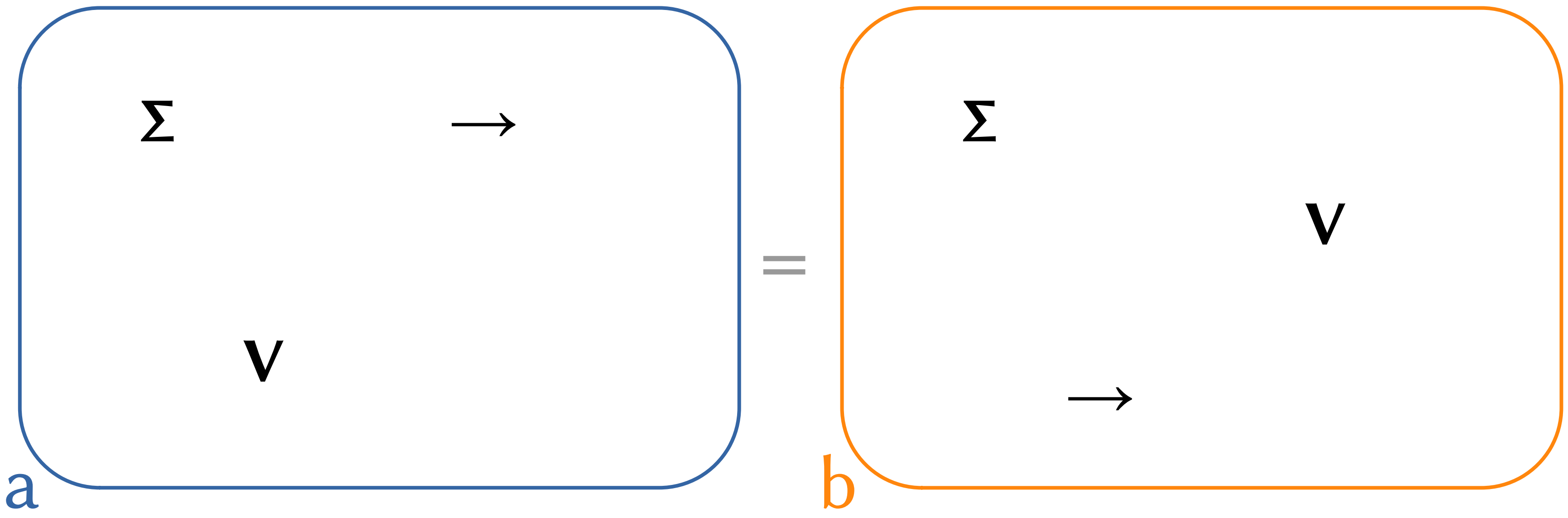
Aksiomoj

de Ernst Zermelo kaj Abraham Fraenkel
(ZF aŭ ZFC, 1922/1925)

ZFC aksiomoj

1) aksiomo de etendo

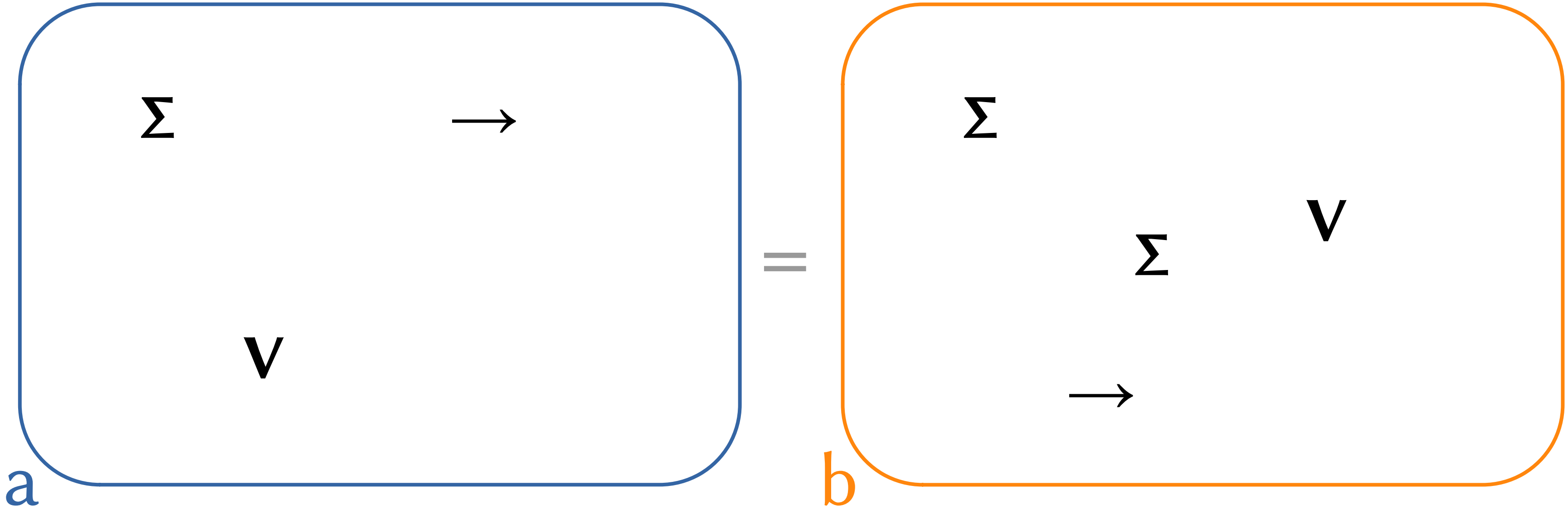
$\forall a \forall b[\ \forall c(c \in a \Leftrightarrow c \in b) \Rightarrow a = b]$



ZFC aksiomoj

1) aksiomo de etendo

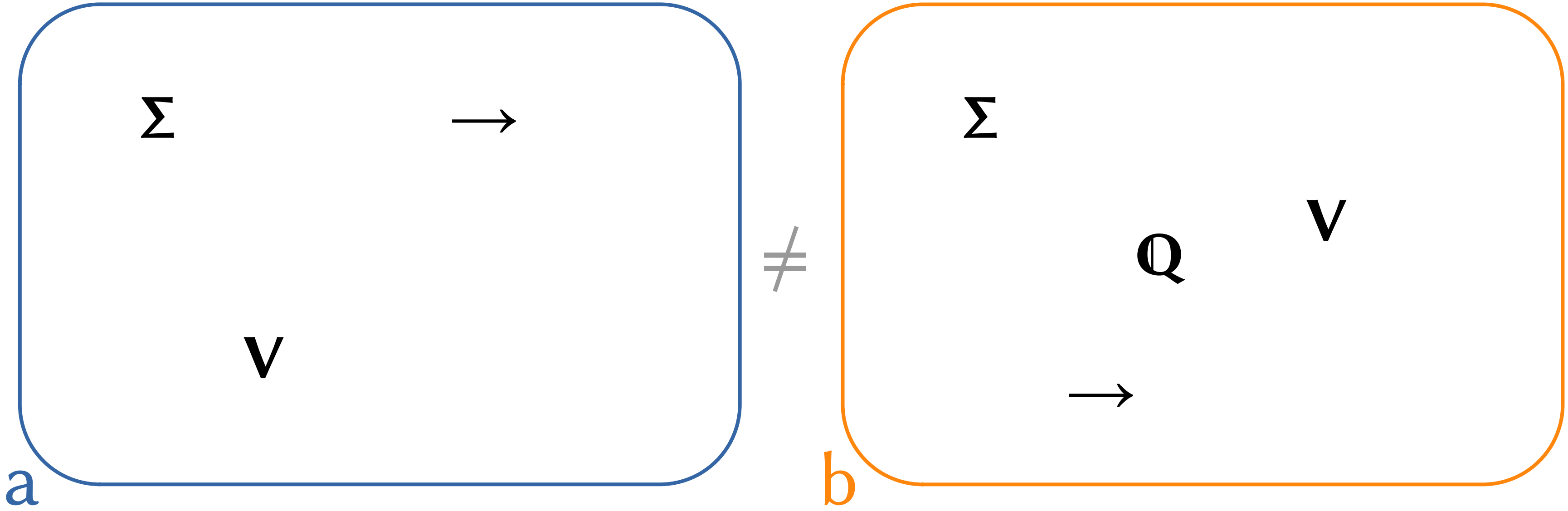
$\forall a \forall b[\ \forall c(c \in a \Leftrightarrow c \in b) \Rightarrow a = b]$



ZFC aksiomoj

1) aksiomo de etendo

$\forall a \forall b [\ \forall c (c \in a \Leftrightarrow c \in b) \Rightarrow a = b]$



ZFC aksiomoj

1) aksiomo de etendo
   $\forall a \forall b[\ \forall c(c \in a \Leftrightarrow c \in b) \Longrightarrow a = b]$

2) aksiomo de reguleco
   $\forall a\ (a \neq \emptyset \Longrightarrow \exists b(b \in a \wedge b \cap a = \emptyset))]$

ZFC aksiomoj

1) aksiomo de etendo

$$\forall a \forall b[\ \forall c(c \in a \Leftrightarrow c \in b) \Longrightarrow a = b]$$

2) aksiomo de reguleco

$$\forall a\ (a \neq \emptyset \Longrightarrow \exists b(b \in a \land \underbrace{b \cap a = \emptyset}_{\text{Kial?}}))]$$

ZFC aksiomoj

1) aksiomo de etendo
$\forall a \forall b[\ \forall c(c \in a \iff c \in b) \implies a = b]$

2) aksiomo de reguleco
$\forall a\ (a \neq \varnothing \implies \exists b(b \in a \land \underline{b \cap a = \varnothing}))]$

Tial: Paradokso de Russell

ZFC aksiomoj

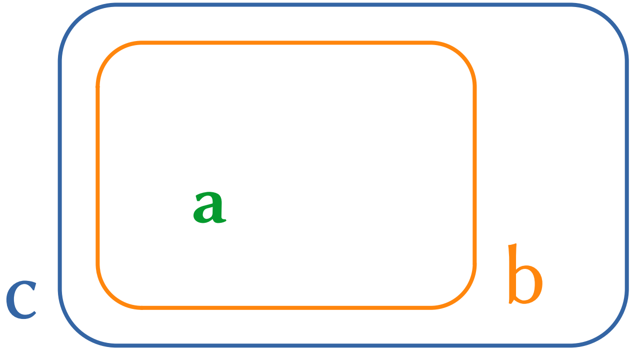
3) aksiomo de apartigo
$\forall e_1,\ldots,e_n \, \forall c \; \exists b \; \forall a \; (a \in b \Longleftrightarrow [a \in c \wedge \varphi(a, e_1,\ldots,e_n, c)])$

ZFC aksiomoj

3) aksiomo de apartigo

$$\forall e_1,\ldots,e_n \forall c\ \exists b\ \forall a\ (a \in b \iff [a \in c \land \varphi(a, e_1,\ldots,e_n, c)])$$

φ estas predikato.



ZFC aksiomoj

3) aksiomo de apartigo

$$\forall e_1,\ldots,e_n\, \forall c\, \exists b\, \forall a\, (a \in b \iff [a \in c \wedge \varphi(a, e_1,\ldots,e_n, c)])$$

$$\forall e_1,\ldots,e_n\, \exists b\, \forall a\, (a \in b \iff \varphi(a, e_1,\ldots,e_n)])$$

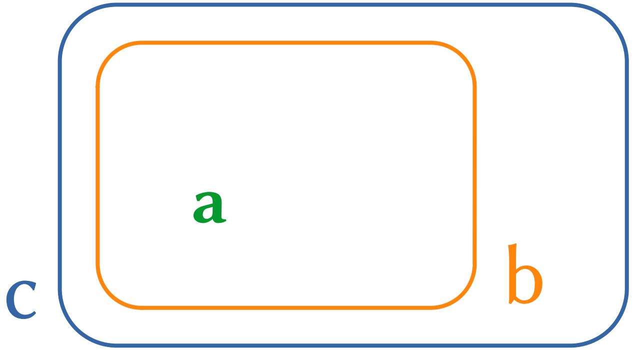
"aksiomo de senlima apartigo"

Supozu $\varphi(x) := \neg(x \in x)$

ZFC aksiomoj

3) aksiomo de apartigo

$$\forall e_1,\ldots,e_n \forall c\ \exists b\ \forall a\ (a \in b \iff [a \in c \land \varphi(a, e_1,\ldots,e_n, c)])$$

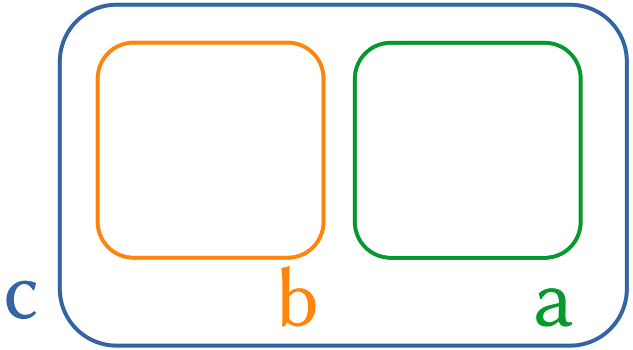


φ apartas b de aliaj elementoj de c.

ZFC aksiomoj

3) aksiomo de apartigo
$\forall e_1,\ldots,e_n \, \forall c \; \exists b \; \forall a \; (a \in b \iff [a \in c \wedge \varphi(a, e_1,\ldots,e_n, c)])$

4) para aksiomo
$\forall a \; \forall b \; \exists c \; ((a \in c) \wedge (b \in c))$



$a := \{1, 2\}$
$b := \{2, 3\}$
$\Longrightarrow c := \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

ZFC aksiomoj

3) aksiomo de apartigo
$\forall e_1,\ldots,e_n \, \forall c \; \exists b \; \forall a \; (a \in b \iff [a \in c \wedge \varphi(a, e_1,\ldots,e_n, c)])$

4) para aksiomo
$\forall a \; \forall b \; \exists c \; ((a \in c) \wedge (b \in c))$

5) aksiomo de kunaĵo
$\forall k \; \exists a \; \forall b \; \forall c \; [(c \in b \wedge b \in k) \Rightarrow c \in a]$
k estas aro de aroj. Ekzistas *a* kiu enhavas ĉiu elemento de ĉiu aro de *k*.

ZFC aksiomoj

6) aksiomo de ĵeto

$\forall a\ \forall e_1 \ldots e_n$ [

$\forall c\ (c \in a \Longrightarrow \exists! d\ \varphi(a, c, e_1 \ldots e_n, d)) \Longrightarrow$

$\exists b\ \forall c\ (c \in a \Longrightarrow \exists d\ (d \in b \wedge \varphi(a, c, e_1 \ldots e_n, d)))$

]

$f(k) = -k$

p.e. $f(1) = -1$

k estas elemento de a. f(k) estas elemento de b.

ZFC aksiomoj

6) aksiomo de ĵeto

$\forall a\ \forall e_1 \ldots e_n$ [

$\forall c\ (c \in a \Longrightarrow \exists! d\ \varphi(a, c, e_1 \ldots e_n, d)) \Longrightarrow$

$\exists b\ \forall c\ (c \in a \Longrightarrow \exists d\ (d \in b \land \varphi(a, c, e_1 \ldots e_n, d)))$

]

7) aksiomo de senfineco, supozu $S(d) := \{d, \{d\}\}$

$\exists a\ [\exists e\ (\forall c\ \neg(c \in e) \land e \in a) \land \forall d\ (d \in a \Longrightarrow S(d) \in a)]$

ZFC aksiomoj

7) aksiomo de senfineco

$$0 := \{\} = \varnothing$$
$$1 := \{0\} = \{\varnothing\}$$
$$2 := \{0,\ 1\} = \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$$
$$3 := \{0,\ 1,\ 2\} = \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$$
$$4 := \{0,\ 1,\ 2,\ 3\} = \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}$$

ZFC aksiomoj

8) aksiomo pri la aro de ĉiuj subaroj

$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \subseteq x \implies z \in y)$

Do ekzistas P(a) kiu kreas la aro de ĉiuj subaroj:

$P(\{1,2,3\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

ZFC aksiomoj

8) aksiomo pri la aro de ĉiuj subaroj
   $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \subseteq x \implies z \in y)$

9) aksiomo de elekto (la C de ZFC)
   $\forall b\ (\forall a\ (a \in b) \implies a \neq \emptyset) \implies (\exists \varphi\ (\forall a\ (a \in b) \implies \varphi(a) \in a))$

ZFC aksiomoj

8) aksiomo pri la aro de ĉiuj subaroj

$\forall x \; \exists y \; \forall z \; (z \subseteq x \implies z \in y)$

9) aksiomo de elekto

$\forall b \; (\forall a \; (a \in b) \implies a \neq \emptyset) \implies (\exists \varphi \; (\forall a \; (a \in b) \implies \varphi(a) \in a))$

Donu al mi φ:

$b := \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$

ZFC aksiomoj

8) aksiomo pri la aro de ĉiuj subaroj
$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \subseteq x \implies z \in y)$

9) aksiomo de elekto
$\forall b\ (\forall a\ (a \in b) \implies a \neq \emptyset) \implies (\exists \varphi\ (\forall a\ (a \in b) \implies \varphi(a) \in a))$

Donu al mi φ:
$b := \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$
$b := \{\{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

ZFC aksiomoj

8) aksiomo pri la aro de ĉiuj subaroj
$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \subseteq x \Longrightarrow z \in y)$

9) aksiomo de elekto
$\forall b\ (\forall a\ (a \in b) \Longrightarrow a \neq \emptyset) \Longrightarrow (\exists \varphi\ (\forall a\ (a \in b) \Longrightarrow \varphi(a) \in a))$

Donu al mi φ:
$b := \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ p.e. $\varphi(e) := 1$
$b := \{\{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ p.e. $\varphi(e) :=$ “la plej malgranda elemento de e”

ZFC aksiomoj

8) aksiomo pri la aro de ĉiuj subaroj
$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \subseteq x \implies z \in y)$

9) aksiomo de elekto
$\forall b\ (\forall a\ (a \in b) \implies a \neq \emptyset) \implies (\exists \varphi\ (\forall a\ (a \in b) \implies \varphi(a) \in a))$

Problemo en senfineco!

ZFC aksiomoj

1) aksiomo de etendo
2) aksiomo de reguleco
3) aksiomo de apartigo
4) para aksiomo
5) aksiomo de kunaĵo
6) aksiomo de ĵeto
7) aksiomo de senfineco
8) aksiomo pri la aro de ĉiuj subaroj
9) aksiomo de elekto

Konkludo

- Matematiko estas malpli pri nombroj sed simboloj
- Matematiko estas formala, ni bezonas pruvon
- Aro estas la baza objekto
- ZFC estas bazo de moderna matematiko

Dankon

Venonta klubvespero:
ĵau 2024-05-**09**
"La bazo de programado"