Definitionen aus der LV Analysis T1

Lukas Prokop

16. November 2010

1 Logik und Mengenlehre

Siehe auch ”boolean logic cheatsheet”

Ableitungsregel:

$$A \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow B$$

Widerlegungsregel:

$$(\neg B) \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow \neg A$$

Kettenschlussregel:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

Beweis durch Fallunterscheidung

$$(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow C$$

1.1 Terminologie

$A \Rightarrow B$ ”A ist eine hinreichende Bedingung für B”

$B \Rightarrow A$ ”B ist eine notwendige Bedingung für A”

$\cap$ Durchschnitt

$\cup$ Vereinigung

$\setminus$ Differenz

$A \cap B = \emptyset$ A ist elementfremd (disjunkt) zu B

1.2 Kartesisches Produkt

Unter dem kartesischen Produkt versteht man alle geordneten Paare mit a aus A und b aus B.

$$A \times B = \Big\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\Big\}$$

Beispiel:

$$\Big\{a, b\Big\} \times \Big\{x, y, z\Big\} = \Big\{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\Big\}$$

Es sei . . .

$$A^3 = A \times A \times A$$

A^3 bezeichnet man als Tripel. A^4 bezeichnet man als Quadrupel. A^n bezeichnet man als n-Tupel.

2 Kombinatorik

Wir definieren . . .

$$\# \text{ die Anzahl}$$

$$j \text{ als ”Laufindex”}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \tag{a}$$

$$0! = 1$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{b}$$

$$\sum_{j=n}^{n} a_j = a_n$$

$$m > n : \sum_{j=m}^{n} a_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1}$$

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \tag{c}$$

$$m > n : \prod_{j=m}^{n} a_j = 1$$

$$\prod_{j=1}^{n}(a_j \cdot \lambda) = \Big(\prod_{j=1}^{n} a_j\Big) \cdot \lambda^n$$

$$\prod_{j=1}^{n+1} a_j = \prod_{j=1}^{n} a_j \cdot a_{n+1}$$

Wieviele Möglichkeiten gibt es alle Elemente von M anzuordnen (Permutation von M)?

Antwort: $|M|!$

Wieviele Möglichkeiten gibt es aus n verschiedenen Objekten k verschiedene Objekte auszuwählen? (Reihenfolge von k berücksichtigt)

Antwort: $\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)$. Wird auch Variation V_k^n genannt.

Wieviele Möglichkeiten gibt es aus n verschiedenen Objekten k verschiedene Objekte auszuwählen? (Reihenfolge von k nicht berücksichtigt)

Antwort: $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$. Wird auch "Binomialkoeffizient" (gesprochen: n über k) genannt. Oder "Kombination von n Elementen zur k-ten Klasse" C_k^n.

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \tag{d}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$m > n : \binom{n}{m} = 1$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{e}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

3 Ringtheorie

Eine Menge R, formal definiert durch $(R, +, \cdot)$, mit den Operationen + und $\cdot$ heißt Ring, sofern er die folgenden Kriterien erfüllt:

- 0 als neutrales Element bez. Addition
- Assoziativgesetz bez. Addition
- Kommutativgesetz bez. Addition
- Die Zahl selbst negiert als neutrales Element der Addition
- Distributivgesetz der Multiplikation bez. Addition

Ein *Ring mit Eins* ist ein Ring mit dem zusätzlichen Kritierium "1 als neutrales Element bez. Multiplikation". Ein "kommutativer Ring" ist ein Ring mit Eins mit dem zusätzlichen Kriterium "Kommutativgesetz bez. Multiplikation".

4 Zahlenbereiche

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$
: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Ganze Zahlen $\mathbb{G}$
: $\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$

Rationale Zahlen $\mathbb{R}$
: $\left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{G}, q \in \mathbb{G}^+ \right\}$

Irrationale Zahlen $\mathbb{I}$
: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (Menge der Zahlen, die sich nicht als Bruch notieren lassen; zB $\sqrt{2}$, e)

Reele Zahlen $\mathbb{R}$
: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
: $\left\{ (a + bi) \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = \sqrt{-1} \right\}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{f}$$

$$(\forall n \in \mathbb{R} : |n| \geq 0) \tag{g}$$

Dreiecksungleichung:

$$|r + s| \leq |r| + |s| \tag{h}$$

5 Folgen

> "Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ hat höchstens einen Grenzwert"

Eine Folge a_n ist konvergent zum Grenzwert A, wenn...

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - A| < \varepsilon \tag{i}$$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, dann heißt $x \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : |a_n - x| < \varepsilon \tag{j}$$

Eine Folge heißt

- monoton wachsend: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$
- monoton fallend: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$
- streng monoton wachsend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$
- streng monoton fallend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$

Eine Nullfolge ist definiert durch:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

6 Reihen

$$(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{k}$$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge. Die *n-te Partialsumme* der Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$ ist definiert durch

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *beschränkt* (mit m als unterer Schranke und n als oberer Schranke), wenn

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in A : m \leq x \leq M \tag{l}$$

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, A beschränkt und $m = \inf A$ und $M = \sup A$. Dann gilt:

$$\forall x \in \mathbb{A} : m \leq x \leq M \tag{m}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x > M - \varepsilon \tag{n}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x < m + \varepsilon \tag{o}$$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeler Zahlen dann seien:

$$\limsup a_{n n\to\infty} = \text{Limes superior} \tag{p}$$

$$\liminf a_{n n\to\infty} = \text{Limes inferior} \tag{q}$$

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, heißt bedingt konvergent.