

Sammlung der Probleme aus der LV GDI

Grundlagen der Informatik

Lehrveranstaltung von Prof. Slany Wolfgang

Lukas Prokop

10.12.21 – 10.01.07

1 Turingmaschine

Angabe: Es sei ein Eingabeband mit einer unbekanntem Anzahl (größer 0) von Einsen links von genau einer Null gegeben. Der Rest des Bandes ist mit 2 gefüllt. Der Cursor steht auf der ersten Eins.

Frage: Programmieren Sie eine Turingmaschine, die alle Einsen mit Zweien überschreibt. Weiters soll die Anzahl der Einsen verdoppelt an die rechte Seite der Null geschrieben werden. Die alten Einsen müssen mit Zweien überschrieben werden. Am Programmende soll sich der Cursor auf der Null befinden.

Beispiel I/O:

Input: ... 22211110222222222 ...

Output: ... 22222220111111112 ...

2 Komplexitätstheorie – Landau-Notation

Angabe: Gesucht ist eine Ordnung folgender Funktionen in n . Gib dabei jeweils eine möglichst langsam wachsende Funktion an:

$$43^{503} = \mathcal{O}(\quad)$$

$$27 \log n = \mathcal{O}(\quad)$$

$$10 \log 2n - 7 = \mathcal{O}(\quad)$$

$$13n + 8 \log 3n = \mathcal{O}(\quad)$$

$$24n \log n - 7n = \mathcal{O}(\quad)$$

$$17n^2 + 100n \log 1000n = \mathcal{O}(\quad)$$

$$\begin{aligned}
27n^{60} + 1^{2n} &= \mathcal{O}(\quad) \\
(n^2 + 3n - 27)^7 &= \mathcal{O}(\quad) \\
n^\pi + \pi^{n-1} &= \mathcal{O}(\quad) \\
(-2n)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \mathcal{O}(\quad)
\end{aligned}$$

Lösungen (der Reihenfolge nach):

$$\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(\log n), \mathcal{O}(\log n), \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n \log n), \mathcal{O}(n^2), \mathcal{O}(n^{60}), \mathcal{O}(n^{14}), \mathcal{O}(\pi^{n-1}), \mathcal{O}(n^{10})$$

3 Collatz' Problem

Dieses Beispiel ist in dieser Form nicht in der VO vorgekommen; es soll nur als Übung dienen. Ursprünglich stammt es aus [projecteuler](http://projecteuler.net)¹.

Angabe: Die folgende iterative Zahlenfolge ist für die Menge der positiven Ganzzahlen definiert:

$$(n \text{ ist gerade:}) n \mapsto n/2 \tag{a}$$

$$(n \text{ ist ungerade:}) n \mapsto 3n + 1 \tag{b}$$

Nutzen wir diese Folgendefinition mit der Zahl 13 als Startwert, entsteht die Kette:

$$13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Diese Kette enthält 10 Elemente. Es wurde noch nicht bewiesen, aber es ist anzunehmen, dass jede beliebige positive Ganzzahl als Startwert nach Ablauf des Algorithmus zu einer 1 führt.

Frage: Schreibe ein Programm in deiner Lieblingssprache, welches mit einer Laufzeit von maximal 10 Sekunden die Frage beantwortet: Welcher Startwert unter 1 Million, erzeugt die längste Kette?

Lösung: Die Zahl 837799 produziert eine Zahlenkette von 525 Zahlen.

4 Logik – The Island of Knights and Knaves

Erklärungen in den Aufzeichnungen der VO vom 09.11.2010

- Knights always say the truth.

¹<http://projecteuler.net/index.php?section=problems&id=14>

- Knaves always lie.
- You meet two people (A and B) on the Island, each of whom is either a knight or a knave.
- A says "I am a knave or B is a knight"

Lösung: Remember, that the first OR ("either a knight or a knave.") is a XOR and direct speech refers to a logical OR ("I am a knave or B is a knight"). Both are knights.

5 Logik – The Island II

Erklärungen in den Aufzeichnungen der VO vom 09.11.2010

- Once again, there are two persons named A and B, both of whom are either a knight or a knave.
- A says "Either I am a knave or else two plus two equals five"
- What would you conclude?

Lösung: "Either or" equals to XOR in logic. So the answer is this situation is not possible.

6 Logik – Three's a crowd

Erklärungen in den Aufzeichnungen der VO vom 09.11.2010

- Again we have three people, A, B, C, each of whom is either a knight or a knave. A and B make the following statements:
- A: "All of us are knaves"
- B: "Exactly one of us is a knight"
- What are A, B, C?

Lösung: A is a knave. B is a knight. C is a knave.

7 Logik – Three’s a crowd-pleaser

Erklärungen in den Aufzeichnungen der VO vom 11.11.2010

- Suppose instead, A and B say the following:
- A: "All of us are knaves"
- B: "Exactly one of us is a **knave**"
- Can it be determined what B is? Can it be determined what C is?

Lösung: Nope. Neither A nor B.

8 Logik – Short and Sweet

- Suppose A says, "I am a knave, but B isn't"
- What are A and B?

Lösung: A and B are knaves.

9 Logik – Another Trio

- We have three inhabitants A, B and C, each of whom is a knight or a knave. A and B make the following statements:
- A: B is a knave.
- B: A and C are of the same type.
- What is C?

Lösung: There are two configurations of A, B and C. In those cases, C is a knave.

10 Logik – The Final Trio

- Again three people A, B and C.
- A says "B and C are of the same type".
- Someone then asks C, "Are A and B of the same type?"

- What does C answer?

Lösung: Yes. There are 4 possible configurations.

11 Logik – The power of logic

This time you come across just one inhabitant lazily lying in the sun. You remember that his first name is either Edwin or Edward, but you cannot remember which. So you ask him his first name and he answers "Edward".

Frage: What is his first name? *Lösung:* Well actually... he is lying... in the sun.

12 Logik – Boolesche Terme lösen

Dieses Beispiel kam nicht in der Vorlesung vor und ist eine Eigenkreation.

Aufgabe: Löse die folgenden Terme für die Konfiguration ($A = True, B = True, C = False, D = True$).

$$\begin{aligned} &(((A \wedge B) \rightarrow C) \vee (\neg C) \wedge (A \vee A \wedge B)) \\ &(A \wedge B \vee (\neg C) \wedge (D \rightarrow A) \wedge (\neg B)) \end{aligned}$$

13 Logik – Eigene boolesche Terme

Dieses Beispiel kam nicht in der Vorlesung vor und ist eine Eigenkreation.

Aufgabe: Vereinfache die Terme so weit wie möglich:

$$\begin{aligned} &(((A \vee B) \vee B) \wedge (C \vee True)) \\ &(A \wedge B \wedge C \vee A \vee True) \\ &((\neg A \vee B) \vee (A \rightarrow B)) \\ &(\neg \neg True \wedge True) \vee (False \vee True) \wedge (A \vee False) \vee (B \wedge True) \wedge C \vee D \end{aligned}$$

Baue nur mithilfe von NAND-Gattern eine Schaltung, die ein XOR simuliert (zwei Eingänge mit True oder False und ein Ausgang mit einem Verhalten wie XOR).

14 Logik – Portia Part One

Die Lösung dieser Aufgabe wurde in der VO vom 18.11.2010 behandelt.

Note: The problem's solution was given in SQL.

These questions were taken from Raymon Smullyan's book *What is the Name of this Book?*, Prentice Hall, 1978.

In Shakespeare's *Merchant of Venice* Portia had three caskets (gold, silver and lead) inside one of which was Portia's portrait. The suitor was to choose one of the caskets, and if he was lucky enough (or wise enough), to choose the one with the portrait, then he could claim Portia as his bride. On the lid of each casket was an inscription to help the suitor choose wisely.

Now suppose Portia wished to choose her husband not on the basis of virtue, but simply on the basis of intelligence. Thus, she asks her suitors a riddle.

Here is Portia's first riddle. She has the caskets inscribed as follows. Portia explains that at least one of the statements is true and at least one is false.

gold The portrait is not in the silver casket.

silver The portrait is not in this casket.

lead The portrait is in this casket.

Lösung: The portrait is in the golden casket.

15 Logik – Portia II

Die Lösung dieser Aufgabe wurde in der VO vom 18.11.2010 behandelt.

Note: The problem's solution was given in SQL.

Portia II (daughter of Portia) has the same problems as her mother selecting a suitable suitor. She has the following descriptions put on her caskets.

Portia explained that no lid contains more than one false statement.

gold

- The portrait is not in here.
- The artist of the portrait was born in Venice.

silver

- The portrait is not in the gold casket.
- The artist of the portrait was born in Florence.

- lead**
- The portrait is not in here.
 - The portrait is in the silver casket.

Lösung: The portrait is in the silver casket.

16 Logik – Portia III

Die Lösung dieser Aufgabe wurde in der VO vom 23.11.2010 behandelt.

Note: The problem's solution was given in SQL.

Portia III has her caskets made by craftsmen from Florence called Bellini and Cellini. Bellini always puts a true statement on the boxes he makes and Cellini always inscribes a false statement.

To make things more exciting, Portia III uses a dagger instead of a portrait. The chances for the suitor are 2 out of 3 now, but if he chooses the dagger, the consequences are serious. The suitor has to be sure he chooses one of the two caskets without the dagger.

The caskets are inscribed:

gold The dagger is in this casket.

silver This casket is empty.

lead At most one of these three caskets was fashioned by Bellini.

Lösung: There are two solutions. The dagger is missing in the gold or the silver caskets.

17 Logik – Einstein Problem

Dieses Beispiel war Teil der Angabe 3. Die Lösung dieses Beispiels war in SQL zu formulieren.

Es gibt 5 Häuser mit je einer Farbe. In jedem Haus wohnt eine Person mit einer Nationalität. Jeder Hausbewohner bevorzugt ein bestimmtes Getränk, raucht eine bestimmte Zigarettenmarke und hat ein bestimmtes Haustier. Keine der 5 Personen trinkt das gleiche Getränk, raucht die selbe Zigarettenmarke oder hält das gleiche Tier wie einer seiner Nachbarn

Es gelten die folgenden Bedingungen:

- Der Brite lebt im roten Haus.
- Der Schwede hält einen Hund.
- Der Däne trinkt gerne Tee.
- Das grüne Haus steht links vom weißen Haus.
- Der Besitzer des grünen Hauses trinkt Kaffee.
- Die Person, die Pall Mall raucht, hält einen Vogel.
- Der Mann, der im mittleren Haus wohnt trinkt Milch.
- Der Besitzer des gelben Hauses raucht Dunhill.
- Der Norweger wohnt im ersten Haus.
- Der Malboro Raucher wohnt neben dem, der eine Katze hat.
- Der Mann, der ein Pferd hat, wohnt neben dem, der Dunhill raucht.
- Der Winfield Raucher trinkt gerne Bier.
- Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
- Der Deutsche raucht Rothmanns.
- Der Malboro Raucher hat einen Nachbarn, der Wasser trinkt.

Frage: Wer hat den Fisch als Haustier?

Lösung: Der Deutsche.

18 RegEx – Analyse

Die Lösung dieser Aufgabe wurde in der VO vom 25.11.2010 behandelt.

Angabe: Gegeben sei der folgende Reguläre Ausdruck:

$$((ab?)+(aa|b)*)+$$

Frage: Werden die folgenden Zeichenkette gematcht?

- ababaabb
- aabbaaba

- baaaabaaa
- aababb

Lösung: Ja, Ja, Nein, Nein.

19 Regex – Konstruktion

Angabe: Entwirf einen möglichst kurzen regulären Ausdruck, der genau jene Worte matcht, in denen die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- Das Wort endet mit einem 'a'.
- Das erste Zeichen ist ungleich dem vorletzten Zeichen.
- Die Länge des Wortes ist gerade.

Ein paar valide Beispiele:

- ababba
- aaaaaaba
- babaaa
- bbaabbaa

Ein paar invalide Beispiele:

- abbb
- baabba
- aabba
- bbaaabb

20 RegEx – Analyse NFA

Konstruiere einen Reguläre Ausdruck, der das Verhalten des folgendes Diagramms (Abb. 1) besitzt:

Lösung: $(ab?aba*b)^*$

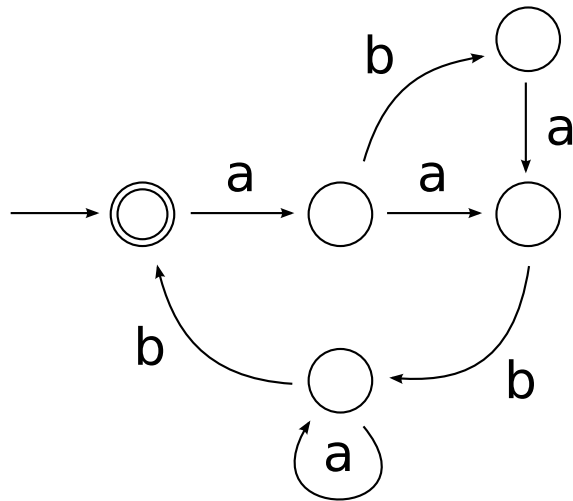


Abbildung 1: Beispiel eines NFA

21 RegEx – Konstruktion NFA

Angabe: Zeichne einen deterministischen Automaten, der genau die Wörter akzeptiert, mit denen folgender regulärer Ausdruck matcht:

$(ab?ba^*bab+ | b(aba)^+b+)$

Vergiss nicht mindestens einen Knoten durch einen doppelten Rand als Terminalknoten zu kennzeichnen.

Lösung: Abb. 2 (alternativ Abb. 3)

22 Formale Grammatiken – RegEx zu reguläre Grammatik

Definiere eine reguläre Grammatik für folgenden regulären Ausdruck:

$ab?ba^*bab+$

Lösung:

$S \rightarrow aB$
 $B \rightarrow bC \mid bD$
 $C \rightarrow bD$
 $D \rightarrow aD \mid bE$

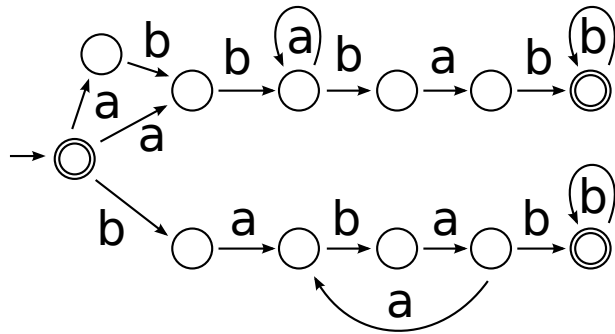


Abbildung 2: NFA der Lösung

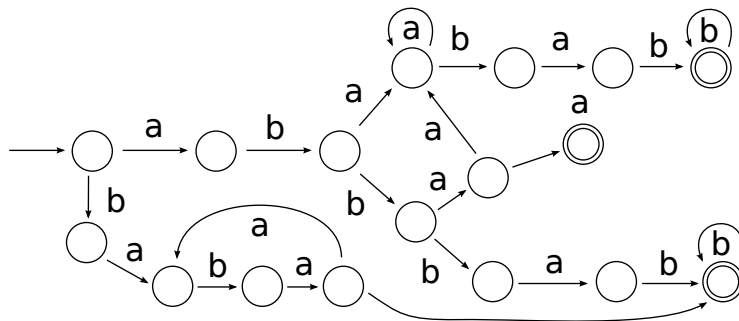


Abbildung 3: 2. Variante eines NFA der Lösung

$E \rightarrow aF$
 $F \rightarrow bG$
 $G \rightarrow bG \mid \varepsilon$

23 Formale Grammatiken – $a^n b^n$

Dieses Beispiel stammt von Wikipedia² und kam in dieser Form nicht in der Vorlesung vor.

Angabe: Konstruiere eine (kontextsensitive) Grammatik G_1 , welche alle Wörter der Form $a^n b^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ beschrieben werden können.

²http://de.wikipedia.org/wiki/Formale_Grammatik#Beispiele

Lösung:

$S \rightarrow ABS$

$S \rightarrow \varepsilon$

$BA \rightarrow AB$

$BS \rightarrow b$

$Bb \rightarrow bb$

$Ab \rightarrow ab$

$Aa \rightarrow aa$