# Wahrscheinlichkeitstheorie für Informatikstudien

Lukas Prokop

October 26, 2013

## 1 Basisdefinitionen

$\Omega$ Grundmenge (mögliche Ausgänge)

$\mathcal{A}$ Ereignisraum

$(\Omega, \mathcal{A})$ Stichprobenraum

$\{w_i\}$ Elementarereignisse (Ausgänge eines Zufallsexperiments)

$A(\in \mathcal{A})$ Ereignis

**Statistische Regularität** Gesetz der großen Zahlen

**Population, Grundgesamtheit** mögliche Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit

**Stichproben** Teilmengen der Population

**Wahrscheinlichkeitsraum**
$\{\Omega, A, P\}, A \leftarrow P(A), A(\in \mathcal{A}) \subseteq \Omega$

**$\sigma$-Algebra**
$\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$
$\Omega \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
$A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
... ist $\sigma$-Algebra bei $\Omega \neq \emptyset$

**C** Combination

**V** Variation

$A \cap B$ Durchschnitt ("intersection")

$A \cup B$ Vereinigungsmenge ("union")

## 2 Basismodell

$$\frac{\text{günstig}}{\text{möglich}} \Rightarrow \frac{\text{Maß(A)}}{\text{Maß}(\Omega)}$$

Angenommen $A$ und $B$ seien zwei Ereignisse $(A, B \in \mathcal{A})$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eines der beiden Ereignisse eintritt, ist:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse eintreten sind:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit (von $A$ unter $B$):

$$P_B(A) := P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

In LAPLACE Wahrscheinlichkeitsräumen (alle Ereignisse treten mit der selben Wahrscheinlichkeit ein) reduziert sich die Berechnung der günstigen Fälle mit ihrer Wahrscheinlichkeit auf kombinatorische Zählprobleme.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \qquad 0 \leq k \leq n$$

## 3 Totale Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis $B$ eintritt ist gleich dem Aufsummieren aller Ereignisse $A$ unter $B$ als Bedingung. Dies entspricht am Wahrscheinlichkeitsbaum: Die Wahrscheinlichkeit eines Knoten ist gleich der Summe aller darunterliegenden Knoten.

$$H_k \cap H_t = \emptyset, k \neq l, \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$$

$$\Rightarrow \forall b \in B : P(b) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(b|H_i)$$

# 4 Systeme

Seriell (eine Komponente muss ausfallen):

$$P(R_S) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) \leq \min_i P(R_i)$$

Parallel (alle Komponenten müssen ausfallen):

$$P(R_S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} R_i\right) \geq \max_i P(R_i)$$

# 5 Intervalle

$$\begin{aligned}
(a,b) = \quad & ]a,b[ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} && (1)\\
[a,b) = \quad & [a,b[ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\} && (2)\\
(a,b] = \quad & ]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\} && (3)\\
[a,b] \quad & \quad\;\; = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} && (4)
\end{aligned}$$

# 6 Summenformeln

$$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$$

$$\sum_{i=m}^{n} c = (n - m + 1) \cdot c$$

$$\sum_{i=m}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=m}^{n} i = \frac{(n+m)(n-m+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 \left(2n^2 + 2n - 1\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} k^i = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} k^i = \frac{1}{1-k} \qquad \text{mit} \quad |k| < 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} k^i = \frac{k^{n+1} - k}{k - 1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k^{-i} = \frac{1 - k^{-n}}{k - 1}$$

# 7 Kombinatorik

In der Kombinatorik können wir vom Basisfall ausgehen, welcher eine Funktion definiert:

$$f : A \to B$$
$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$$
$$B = \{t_1, t_2, \ldots, t_l\}$$
$$t_i = (w_1, w_2, \ldots, w_r)$$

Dabei sieht unser Modell so aus, dass die Beziehung zwischen $a_i$ und $w_i$ beliebig sein kann. Die Tupel in $B$ sind jedoch homogen ($|w_i| = |w_j|$). Es wird aus einem gegebenen Tupel $A$ eine Menge an Tupel $B$ generiert. Bezüglich dieser Generation sind 3 Basisfragen zu stellen:

- Ist die *Reihenfolge* der erzeugten Tupelelemente $w_{1\ldots r}$ relevant?
- Darf ein Element *wiederholt* im Tupel $t_i$ vorkommen?
- *Unterscheiden* sich die Kardinalitäten (Größen) von $A$ und Tupel in $B$?

Zuerst definieren wir die Begriffe:

**mit Wiederholung**
"mit WH", "mit Zurücklegen", "mehrfach vorkommen"

$$w_i = w_{i+n} \quad n > 0$$

gegenteilig auch "ohne Wiederholung"

**Reihenfolge relevant**
"Reihenfolge wichtig", "geordnet"

$$(w_1, w_2, w_3) \neq (w_1, w_3, w_2)$$

gegenteilig auch "Reihenfolge irrelevant"

**Unterschiedlichkeit**

$$|A| \neq |B_1|$$

**Unterscheidbarkeit**
"Unterscheidbarkeit der Elemente"

$$\notin a_i \neq a_{i+n} \quad n > 0$$

Dabei ist Unterscheidbarkeit für die Ursprungsmenge $A$ das, was Wiederholung für die Abbildungsmenge $B$ ist. Die einzige Begründung für die Unterscheidung dieser Begriffe (und fehlende Verallgemeinerung) ist, dass Unterscheidbarkeit die Probleme wesentlich komplexer macht und die allgemeinen Formeln nicht bekannt sind. Die Formeln für Unterscheidbarkeit können wir damit nicht betrachten; wir nehmen Unterscheidbarkeit in allen Formel an. Wir werden aber vereinzelt Formeln für unterschiedliche Kardinalitäten betrachten. Der Spezialfall "alle Elemente sind ununterscheidbar" fällt mit dem Begriff "mit Wiederholung" zusammen.

Wir können wir den Begriff der "Reihenfolge" direkt in zwei Begriffe der Kombinatorik umsetzen: Variation (V, "Reihenfolge relevant") und Kombination (C, "Reihenfolge irrelevant"). Eine $r$-Variation bezeichnet, dass die erzeugten Tupel aus $A$ $r$-elementig sind ($|t_i| = r$). $n$ bezeichnet die Kardinalität der Ursprungsmenge $A$.

# 8 Permutation

Unter Permutation versteht man die Annahme, dass aus einem bereits erzeugten Tupel $t_i$ alle möglichen Variationen erzeugt. Dies entspricht genauso der Abbildung $f$, wenn man die Basisfragen wie folgt beantwortet:

- Die Reihenfolge ist relevant.
- Eine Wiederholung ist nicht möglich (alle Elemente der Ursprungsmenge müssen genau einmal wiederverwendet werden). Damit ist $n = r$.
- Die Ursprungsmenge ist gleich der Abbildungsmenge. Damit ist die Kardinalität ident.

Damit ist die Permutation ein Spezialfall der Variation ohne Wiederholung. Mögliche Permutationen einer Menge $\{A, B, C\}$ sind:

$$\{(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C),$$
$$(B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)\}$$

Dabei kann die Größe aller Permutationen mittels der Formel $n!$ berechnet werden ($3! = 6$). Herleitung:

$$V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Die folgende Frage erfragt eine modifizierte Version der Permutationsformel; man spricht auch von der "Permutation mit Wiederholung", wobei hier "Wiederholung" anders verwendet wird):

Gegeben sei ein Tupel von Elementen. Dabei sind $x$ der $n$ Elemente nicht voneinander unterscheidbar (siehe Mississippi-Beispiel unten):

$$P_w(n; k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$

wobei $k$ die Anzahl aller eindeutigen Elemente ist und $k_i$ für die Anzahl der identen Elemente ihrer Art ist.

### 8.1 Beispiel für $n = |\{1,2,3\}|, r = 2$

| | mit WH | ohne WH |
|---|---|---|
| V | $(1,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$<br>$(2,1)$ $(2,2)$ $(2,3)$<br>$(3,1)$ $(3,2)$ $(3,3)$<br>$V_w(n,r) = n^r$ | $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,1)$<br>$(2,3)$ $(3,1)$ $(3,2)$<br>$V(n,r) = \binom{n}{r} r!$ |
| C | $(1,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$<br>$(2,2)$ $(2,3)$<br>$(3,3)$<br>$C_w(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$ | $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,3)$<br>$C(n,r) = \binom{n}{r}$ |

Wir lösen Binomialkoeffizienten auf:

| | mit WH | ohne WH |
|---|---|---|
| V | $n^r$ | $\frac{n!}{(n-r)!}$ |
| C | $\frac{(n-1+r)!}{(n-1)!r!}$ | $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ |

In der Programmiersprache *python*:

**r-Variation mit WH** itertools.product(n, repeat=r)

**Permutation** itertools.permutations(n, r)

**r-Kombination ohne WH** itertools.combinations(n, r)

# 9 Anwendung der Formeln

**Q:** Wählen Sie für das Lottospiel 6 aus 49 Zahlen ("49 über 6").
**A:** $C(n,r) = \binom{49}{6} = 13983816$

**Q:** Aus n Elementen wir r-mal mit Zurücklegen gezogen
**A:** $V_w(n,r)$

**Q:** Gegeben sei eine Menge $\{A, B, C\}$. Wieviele Möglichkeiten gibt es diese Menge anzuordnen?
**A:** $3! = 6$

**Q:** Gegeben sei ein Anordnungsproblem: r nicht unterscheidbare Bälle werden in n numerierte Zellen gelegt
**A:** $C_w(n,r)$

**Q:** Wieviele Varianten gibt es $x$ Plätze in $y$ Gruppen zu teilen?
**A:** $\binom{x+1}{y+1}$

**Q:** Wieviele Permutationen des Worts MISSISSIPPI gibt es?
**A:** $n = 11$ mit der Permutationsformel $\frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$

**Q:** Wieviele Kleinbuchstabenwörter mit der Länge 5 gibt es?
**A:** $V_w(30,5) = 30^5 = 24300000$

**Q:** 6 verschiedenfarbige Kästchen mit jeweils 1 gleichfarbigen Kugel. Wieviele Möglichkeiten gibt es die Kugeln in andersfarbige Kästchen zu verteilen?
**A:** Subfakultät $!n = !6 = 265$

**Q:** Wieviele Möglichkeiten gibt es 5 Objekte in 3 Schachteln zu legen, wobei Schachtel 1 3 Objekte besitzen soll und die anderen 1?
**A:** Multinomialkoeffizient $\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \binom{5}{3,1,1} = 20$

# 10 Verteilungsmodelle

Wir können für die meisten Aufgabenstellungen unser Problem in ein Verteilungsmodell geben, welches uns dann gefragte Parameter leichter errechnen lässt. Wir unterscheiden dabei zwischen diskreten und stetigen Modellen.

Als erstes Werkzeug definieren wir eine Zufallsvariable $X$ über eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$. $P_X$ nennt sich die *Verteilung von $X$*. Dabei ist $x = X(w), w \in \Omega$ die *Realisation* von $X$.

$$P(\Omega, \mathcal{A}) \to P_X(\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

Die Funktion $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$F_X(x) = P(X \leq x) \forall x \in \mathbb{R}$$

ist die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $X$.

Für diskrete Modelle gilt: Es können endlich oder abzählbar unendlich viele Werte angenommen werden.

$$p_i := P(X = i) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Für stetige Modelle gilt: $f_X \geq 0$ und $f_X$ heißt Dichtefunktion von $X$.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

Wir möchten jetzt wissen, wie sich das Modell verhält, wenn $X$ einen bestimmten Wert annimmt oder in einem bestimmen Intervall liegt. Durch die Zuordnung können wir Techniken der Analysis für die Wahrscheinlichkeitstheorie verwenden.

## 10.1 Modellanwendung

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \quad , a < b$$

$$P(-\infty < X \leq b) = F_X(b)$$

$$P(a < X < \infty) = 1 - F_X(a)$$

$$P(X = b) = F_X(b) - \lim_{\epsilon \downarrow 0} F_X(b - \epsilon)$$

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} p_i$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$$

# 11 Kenngrößen

## 11.1 Steiner'scher Verschiebungssatz

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X)$$

## 11.2 Erwartungswert

$$E(g(X)) := \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx & \text{für } X \text{ stetige ZV} \\ \sum_{i=0}^{\infty} g(i) p_i & \text{für } X \text{ diskrete ZV} \end{cases}$$

$$\mu_k = E(X^k) \Rightarrow \mu = \mathrm{E}(X)$$

## 11.3 Varianz

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E((X - \mu)^2)$$

## 11.4 Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

## 11.5 Schiefe

$$\gamma_1 = \frac{E((X - \mu)^3)}{(\mathrm{Var}(X))^{3/2}}$$

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(X) = 0 & \text{symmetrisch} \\ \gamma_1(X) < 0 & \text{linksschief} \\ \gamma_1(X) > 0 & \text{rechtsschief} \end{array}$$

## 11.6 Kurtosis / Exzess

$$\gamma_2(X) = \frac{E((X - \mu)^4)}{(\mathrm{Var}(X))^2} - 3$$

# 12 Binomialverteilung

- Diskret, Bernoulli-Experimente
- Analog zu Ziehen mit Zurücklegen
- Das Experiment wird $n$ mal durchgeführt und jede Wiederholung ist unabhängig und führt mit $p$ zu Erfolg. $\Rightarrow$ Parameter $n$ und $p$. $q = 1 - p$. „$X$ ist binomialverteilt mit n und p":

$$X \sim B(n, p)$$

$$B(k;n,p) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k = 0, 1, \dots, n \qquad 0 < p < 1$$

Wir nehmen ein Modell an, in dem nur Erfolge und Misserfolge möglich sind. Solche Prozesse nennen sich Bernoulli-Prozesse. Dabei sind die einzelnen Erfolge gleichartig und unabhängig voneinander. Dabei ist $n$ ist Anzahl der Versuche und $p \in [0,1]$ die Erfolgswahrscheinlichkeit.

- $\mathrm{E}(X) = n \cdot p$
- $\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot q$
- $\gamma_1(X) = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$
- $\gamma_2(X) = \frac{1-6pq}{npq}$
- $P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

# 13 Geometrische Verteilung

- Diskret, Bernoulli-Experimente
- $X = \#(\text{Anzahl der Fehlversuche bis ersten Erfolg})$
- Wahrscheinlichkeit $p$

$$X \sim G(p)$$

- $Y = X + 1 = \#(\text{Anzahl der Versuche})$
- $\mathrm{E}(X) = \frac{q}{p}, E(Y) = \frac{1}{p}$
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{q}{p^2}, \mathrm{Var}(Y) = \frac{q}{p^2}$
- $\gamma_1(X) = \gamma_1(Y) = \frac{1+q}{\sqrt{q}}$
- $P(X=k) = pq^k \qquad 0 < p < 1, k = 0, 1, \dots$

# 14 Hypergeometrische Verteilung

- Diskret
- Analog zu Urnenmodell *ohne* Zurücklegen
- $X = \#(\text{Rote Kugeln})$
- Anzahl der gezogenen Kugeln $n$, Anzahl aller Kugeln $N$, Anzahl roter Kugeln $M$. X ist hypergeometrisch verteilt:

$$X \sim H(N, M, n)$$

$$h(N,M,n) := P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\max(0, n-(N-M)) \leq k \leq \min(M, n)$$

- $\mathrm{E}(X) = n\frac{M}{N}$
- $\mathrm{Var}(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$
- $\gamma_1(X) = \frac{(1-2\frac{M}{N})(1-2\frac{n}{N})}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)(1-\frac{2}{N})}}$

# 15 Poisson-Verteilung

- Diskret, Bernoulli-Experimente
- Anzahl der Versuche $n$ sehr groß, Erfolgswahrscheinlichkeit $p$ sehr klein
- Binomialverteilung kann approximiert werden (nur mehr 1 Parameter $\lambda$).

$$X \sim P(\lambda) \qquad \lambda = np$$

$$p_k := P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

- $\mathrm{E}(X) = \lambda$
- $\mathrm{Var}(X) = \lambda$
- $\gamma_1(X) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
- $\gamma_2(X) = \frac{1}{\lambda}$

# 16 Gleichverteilung

- Stetig
- Zufällige Auswahl eines Teilintervalls (alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit) der Länge $\delta x$ in einem Intervall $(a, b)$.
- $X$ ist gleichverteilt: $X \sim U(a, b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

- $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $\gamma_1(X) = 0$
- $\gamma(X) = -1.2$

# 17 Exponentialverteilung

- Stetig
- Werte können nicht 0 werden. zB Lebensdauer.
- Standardform der Exponentialverteilung ist E(1)
- $X$ ist exponentialverteilt $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit dem Skalierungsparameter $\lambda$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

$$\Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

- $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $\gamma_1(X) = 2$
- $\gamma_2(X) = 6$

# 18 Normalverteilung

- Stetig
- Gauß'sche Glockenkurve
- Im Intervall der Abweichung $\pm 2\sigma$ sind 95% der Werte zu finden
- Lokalisationsparameter $\mu$, Skalierungsparameter $\sigma$
- $X$ ist normalverteilt: $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty < x < \infty, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dt = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$\Phi(x)$ ist die Verteilungsfunktion von $N(0, 1)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

- $N(0, 1) : \mathrm{E}(X) = 0, N(\mu, \sigma^2) : E(Y) = \mu$
- $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

# 19 Gammaverteilung

- Stetig
- Lebensdauer von Industriegütern
- Gestaltparameter $a$ und Skalierungsparam. $\lambda$
- Standardform: $Z = \lambda X \Rightarrow \gamma(a, 1)$
- $X$ ist gammaverteilt: $X \sim \gamma(a, \lambda)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} & x > 0, a > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

- $E(X) = \frac{a}{\lambda}$
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{a}{\lambda^2}$
- $\gamma_1(X) = \frac{2}{\sqrt{a}}$
- $\gamma_2(X) = \frac{6}{a}$

# 20 Erzeugende Funktion

Die Erzeugende Funktion ist durch die Verteilung von $X$ eindeutig festgelegt.

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i)s^i$$

$$\Rightarrow G_X(0) = P(X = 0) \quad G_X(1) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i) = 1$$

$$\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$$

# 21 Skriptum

Approximationen S. 74
Approximation $H$ zu $B$ S. 50
Normalverteilung Wertetabelle S. 68

# 22 Zufallsvektoren

Wir erweitern den Wahrscheinlichkeitsraum auf weitere Dimensionen (hier: auf eine zweite).

$$(X, Y) : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$$

$$F_{X,Y}(x, y) := P(X \le x, Y \le y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{i \le \lfloor x \rfloor} \sum_{j \le \lfloor y \rfloor} p_{ij} \quad \text{diskret}$$

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \infty_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v)\, dv\, du \quad \text{stetig}$$

## 22.1 Randverteilungen

Diskreter Zufallsvektor $(X, Y)$:

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X = i, Y = j) \quad \text{W-Funktion von X}$$

$$P(Y = j) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i, Y = j) \quad \text{W-Funktion von Y}$$

Stetiger Zufallsvektor $(X, Y)$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy \quad \text{Randdichte von X}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy \quad \text{Randdichte von Y}$$

## 22.2 Unabhängigkeit

Diskreter Zufallsvektor $(X, Y)$. $X, Y$ sind stochastisch unabhängig, wenn

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j) \quad \forall i, j$$

Stetiger Zufallsvektor $(X, Y)$. $X, Y$ sind stochastisch unahängig, wenn

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

## 22.3 Erwartungswert

$$E(g(X, Y)) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g(i, j)p_{ij} \quad \text{diskret}$$

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy \quad \text{stetig}$$

## 23 Ableitung

$$(a)' = 0$$

$$(a \cdot f)' = a \cdot f'$$

$$(g \pm h)' = g' \pm h'$$

$$(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$$

$$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(g \circ h)'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$f(x) = g(x)^{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \left(h'(x)\ln(g(x)) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right) g(x)^{h(x)}$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$$

## 24 Integrale

$$\int e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

$$\int \lambda e^{-\lambda t}\, dt = -e^{\lambda(-t)} + c$$